Bull. Sc. math., 2ᵉ série,
109, 1985, p. 253-308.

ood-Paley theory. —
Tokyo Press, 1970

New York, Springer-
ol. 123).
ities, *J. of Functional*

tions of quasilinear
1967, pp. 81-122.
ation speed; Kernel
of complete rieman-

PETITES PERTURBATIONS ALÉATOIRES DES SYSTÈMES DYNAMIQUES : DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

PAR

ROBERT AZENCOTT (*)
[Univ. Paris-7]

RÉSUMÉ. — Sur $\mathbb{R}^n$ nous considérons les systèmes perturbés x^ε, où le paramètre $\varepsilon > 0$ tend vers zéro, modélisés par l'équation d'Ito :

$$dx^\varepsilon = \varepsilon\, s(x^\varepsilon)\, d\omega + b(\varepsilon, x^\varepsilon)\, dt,$$

où ω est le brownien de $\mathbb{R}^p$, et les coefficients s, b sont lisses, dépendant du temps. Pour une large classe de parties A de l'espace des chemins continus $C_{[01]}(\mathbb{R}^n)$ nous calculons des développements précis du type :

$$P(x^\varepsilon_{[01]} \in A) = e^{-(\Lambda(A)/\varepsilon^2) + (\Lambda_1(A)/\varepsilon)} [a_0 + a_1 \varepsilon + \ldots + a_k \varepsilon^k + o(\varepsilon^k)],$$

où $\Lambda(A) \geqslant 0$ est la classique fonctionnelle d'énergie.

ABSTRACT. — Small random perturbations of dynamic systems: asymptotic expansions. On $\mathbb{R}^n$ we consider the perturbed systems x^ε, where the parameter $\varepsilon > 0$ tends to zero, modelized by the Ito equation:

$$dx^\varepsilon = \varepsilon\, s(x^\varepsilon)\, d\omega + b(\varepsilon, x^\varepsilon)\, dt,$$

where ω is the Brownian motion on $\mathbb{R}^p$ and the coefficients s, b are smooth (and time dependent). For a large class of subsets A of the space of continuous paths $C_{[01]}(\mathbb{R}^n)$ we compute precise expansions of the form:

$$P(x^\varepsilon_{[01]} \in A) = e^{-(\Lambda(A)/\varepsilon^2) + (\Lambda_1(A)/\varepsilon)} [a_0 + a_1 \varepsilon + \ldots + a_k \varepsilon^k + o(\varepsilon^k)],$$

where $\Lambda(A) \geqslant 0$ is the classical energy functional.

(*) Texte présenté par P. MALLIAVIN, reçu le 5 septembre 1984.

Classification matières AMS (MOS) 1980 : 60 G 60, 60 F 10, 93 E 10, 93 E 15, 70 K 50.

Vedettes matières : Large deviations. Perturbed dynamic systems. Action functional. Asymptotic expansions.

Robert AZENCOTT, Mathématique, Bât. n° 425, Université Paris-Sud, Campus universitaire, 91405 Orsay Cedex.

0. Introduction

Sur un ouvert U de $\mathbb{R}^m$, considérons une famille x^ε de diffusions (non homogènes dans le temps) indexées par un « petit » paramètre réel $\varepsilon > 0$, et vérifiant les équations d'Ito :

$$dx_t^\varepsilon = \varepsilon\, s_t(x_t^\varepsilon)\, d\omega_t + b_t(\varepsilon, x_t^\varepsilon)\, dt, \tag{1}$$

où ω_t est le brownien sur $\mathbb{R}^k$. On suppose les champs matriciels et vectoriels $s_t(x)$, $b_t(\varepsilon, x)$, suffisamment lisses, et $a_t(x) = s_t(x)\, s_t(x)^*$ *inversible*.

Les x^ε modélisent, quand $\varepsilon \to 0$, de petites perturbations aléatoires du système dynamique *déterministe* x^0 donné par :

$$dx_t^0 = b_t(0, x_t^0)\, dt. \tag{2}$$

Renvoyons à Ventsel-Freidlin [12] et Azencott [1] qui cernent les aspects essentiels de cette question.

Soit $C(U)$ l'espace des chemins continus sur $[0, T]$ à valeurs dans U. Pour une large classe de parties mesurables A de $C(U)$, on sait (*cf.* [1], [12] et Donsker-Varadhan [7]) que lorsque $\varepsilon \to 0$:

$$\varepsilon^2 \log P(x_{0,\,T}^\varepsilon \in A) \sim -\Lambda(A) = -\inf_{f \in A} \lambda(f), \tag{3}$$

où $\lambda : C(U) \to [0, +\infty]$ est une fonctionnelle d'action (ou d'énergie), qui vaut lorsqu'elle est finie :

$$\lambda(f) = \frac{1}{2} \int_0^T [f_t' - b_t(0, f_t)]^*\, a_t(f_t)^{-1}\, [f_t' - b_t(0, f_t)]\, dt. \tag{4}$$

Dans cet article, nous prouvons que si le bord de A est assez lisse, on a en fait un développement asymptotique précis du type :

$$P(x_{0,\,T}^\varepsilon \in A) = e^{-(\Lambda(A)/\varepsilon^2) + (\Lambda_1/\varepsilon)} [a_0 + a_1 \varepsilon + \ldots + a_L \varepsilon^L + O(\varepsilon^{L+\rho})], \tag{5}$$

avec $\rho > 0$ déterminé par A, et L lié à la classe de ∂A et celle des coefficients de dx^ε.

En fait, il faut distinguer deux cas très différents :

Si $\Lambda(A) = 0$, on a alors $\Lambda_1 = 0$ et donc :

$$P(x_{0,\,T}^\varepsilon \in A) = a_0 + a_1 \varepsilon + \ldots + a_L \varepsilon^L + O(\varepsilon^{L+\rho}).$$

Si $\Lambda(A) \neq 0$, on a alors en général $a_0 = 0$ et :

$$P(x^{\varepsilon}_{0,\,T} \in A) \sim \varepsilon\, a_1\, e^{-(\Lambda(A))/\varepsilon^2) + (\Lambda_1/\varepsilon)}.$$

Remarquons d'ailleurs que lorsque $b_t(\varepsilon, x)$ vérifie :

$$b_t(0, x) \equiv \partial_\varepsilon b_t(0, x) \equiv 0,$$

ce qui est par exemple le cas lorsque $b_t(\varepsilon, x)$ ne dépend pas de ε, on a toujours $\Lambda_1 = 0$, de sorte que pour la situation générique $\Lambda(A) \neq 0$, on constate alors que :

$$P(x^{\varepsilon}_{0,\,T} \in A) \sim \varepsilon\, a_1\, e^{-\Lambda(A)/\varepsilon^2},$$

ce qu'il n'est pas possible de deviner à partir de l'estimation classique (3).

Pour obtenir le développement (5), l'hypothèse essentielle est la suivante : *on suppose que le minimum de l'énergie λ sur $\bar{A}$ n'est atteint qu'en un nombre fini de points*, cas dont l'étude se ramène immédiatement à celui où λ atteint son minimum en un seul point de $\bar{A}$. Nous démontrons que *ceci est toujours vrai pour A convexe avec $\Lambda(A)$ assez petit*. De plus, il nous faut supposer qu'*au voisinage des points $f \in \partial A$ tels que $\lambda(f) = \Lambda(\bar{A})$, le bord de A est suffisamment différentiable*. Cette restriction est naturelle car elle interviendrait déjà en dimension *finie* pour étudier des développements asymptotiques aussi simples que celui de $\mu(nA)$ avec $n \to +\infty$ et μ mesure *gaussienne* sur un espace euclidien.

Tous les termes du développement de $P(x^{\varepsilon} \in A)$ sont calculés ici, explicitement pour Λ_1, et à l'aide de formules probabilistes explicites pour les a_i, $i \geqslant 0$.

Notre approche combine la méthode de Laplace appliquée directement à des intégrales « oscillantes » définies sur l'espace de Wiener, et l'utilisation de la formule de Taylor stochastique (*cf.* Bismut [5], Malliavin [10] et Azencott [2]) qui développe les solutions des équations d'Ito dépendant d'un paramètre. Cette méthode, apparentée aux points de vue de Schilder [11] et Ellsworthy-Truman [8], nous a déjà permis de traiter efficacement plusieurs problèmes délicats de développements asymptotiques (Azencott [2], [3] et Azencott-Doss [4]) concernant les intégrales du type Feynmann-Katz, les densités de diffusions en temps petit, l'équation de Schrödinger à constante de Planck évanescente.

L'efficacité formelle de ces outils de calcul se confirme donc clairement pour nous depuis deux ans. Du point de vue technique, cette approche des démonstrations rigoureuses de la validité des développements obtenus, bien que les estimations nécessaires réclament dans chaque cas un certain acharnement. Il serait bien entendu très intéressant d'avoir une justification *systématique générale* de la validité des développements formels de ce type, et nous avons (à moyen terme!) une vue assez optimiste sur l'existence d'un formalisme indolore et garanti mathématiquement.

Signalons enfin l'intervention cruciale (*cf.* § 10) d'un grossissement de filtration par une variable gaussienne (*cf.* Jeulin et Chaleyat-Maurel [9], [6]) qui se prête ici à quelques jolis calculs polynomiaux et échappe, en toute rigueur du moins, aux formules de [9] et [6].

Plan commenté de l'article

1. *Systèmes dynamiques perturbés.* — On introduit les diffusions (x^ε) données par (1) et les hypothèses sur les coefficients s, b.

2. *Transformée de Cramer.* — L'énergie λ et son rayon de convexité $RC(x)$ en $x \in \mathbb{R}^m$.

3. *Développements asymptotiques de* $P(x^\varepsilon_{0,T} \in A)$. — Les résultats essentiels; validité du développement (5) pour A convexe et $\Lambda(A) < RC(x)$; cas des diffusions en temps petit.

4. *Localisation du calcul.* — Sur un voisinage $f+V$ du $f \in \partial A$ tel que $\lambda(f) = \Lambda(A)$, on écrit $A \cap (f+V) = \{g \mid H(g) > 0\}$ avec $H(f) = 0$ et H lisse construite avec soin (équation locale corrigée); remplacement de A par $A \cap (f+V)$; application de la formule de Girsanov pour avoir :

$$P(x^\varepsilon_{0,T} \in A) \sim E\left[1_{H(f+z^\varepsilon)>0} \exp - \frac{I(z^\varepsilon)}{\varepsilon^2}\right],$$

avec $dz^\varepsilon = \varepsilon\, s(f+z^\varepsilon)\, d\omega_t + [b(\varepsilon, f+z^\varepsilon) - b(0, f)]\, dt$ et $I(z^\varepsilon)$ fonctionnelle numérique explicite de $z^\varepsilon_{0,T}$ et dz^ε.

5. *Polynômes et processus à queue exponentielle lente.* — L'espace $\mathscr{W}$ des processus tels que $P(\| W_{0,T} \|_\infty \geq r) \leq \exp(-cr^\alpha)$ avec $c, \alpha > 0$; stabilité de $\mathscr{W}$ pour les fonctionnelles polynomiales et intégrations stochastiques browniennes.

6. *Développement de Taylor stochastique de* z^ε. — On écrit $z^\varepsilon = \varepsilon g_1 + \ldots + \varepsilon^M g_M + \varepsilon^{M+1} \hat{g}_{M+1}$, avec $g_1 \ldots g_M$ donnés par un système d'Ito en cascade, g_1 gaussien, et un « reste » $\hat{g}_{M+1}$.

ments obtenus,
cas un certain
ine justification
nels de ce type,
sur l'existence

ossissement de
et CHALEYAT-
olynomiaux et
[6].

diffusions (x^ε)

1 de convexité

résultats essen-
$)<RC(x)$; cas

$f\in\partial A$ tel que
$H(f)=0$ et H
acement de A
r avoir :

fonctionnelle

· L'espace $\mathscr{W}$
$\alpha>0$; stabilité
stochastiques

— On écrit
ar un système

7. *Développement de Taylor stochastique de* $I(z^\varepsilon)$. — On obtient pour s, b de classe $N+3$, des v. a. $J_j\in\mathscr{W}$ telles que :

$$I(z^\varepsilon)=J_0+\varepsilon J_1+\ldots+\varepsilon^{N+2}J_{N+2}+\varepsilon^{N+3}\hat{J}_{N+3},$$

avec $J_0=\Lambda(A)$, $J_1=0$, J_2 calculée à partir des dérivées $\lambda'\lambda''$ de l'énergie λ.

8. *Développement de Taylor stochastique de* $Z=\varepsilon^{-1}H(f+z^\varepsilon)$. — On obtient des v. a. $r_j\in\mathscr{W}$ telles que :

$$Z=\varepsilon^{-1}H(f+z^\varepsilon)=r_1+\varepsilon r_2+\ldots+\varepsilon^{n+1}r_{n+2}+\varepsilon^{n+2}\hat{r}_{n+3},$$

pour ∂A de classe $(n+3)$ en f.

9. *Calcul du terme principal de* $P(x^\varepsilon_{0,\,T}\in A)$. — Une étude de la forme quadratique $[\lambda''(f)-c\,H''(f)]$ où $c\in\mathbb{R}^+$ est déterminé par $\lambda'(f)=c\,H'(f)$, fournit des nombres Λ_0, Λ_1, Λ_2 tels que :

$$P(x^\varepsilon_{0,\,T}\in A)\sim\exp\left(-\frac{\Lambda_0}{\varepsilon^2}+\frac{\Lambda_1}{\varepsilon}+\Lambda_2\right)E(1_{Z>0}X),$$

avec $X\sim\exp(-(1/\varepsilon)\,\lambda'(f).g_1+\Phi g_1^2)$, où Φ est une forme quadratique explicite en g_1, dg_1.

10. *Relations de dépendance entre les* g_j, r_j, *et* $Y=H'(f)g_1$. — Une situation de grossissement de la filtration brownienne par la v. a. gaussienne $Y=H'(f)g_1$; on calcule explicitement :

$$g_j=\textstyle\sum_{0\leqslant i\leqslant j}G_{ji}Y^i,\qquad r_j=\sum_{0\leqslant i\leqslant j}R_{ji}Y^i,\qquad J_j=\sum_{0\leqslant i\leqslant j}J_{ji}Y^i,$$

avec des processus G_{ji} et des v. a. R_{ji}, J_{ji} *indépendants de* Y.

11. *Calcul formel du développement de* $P(x^\varepsilon_{0,\,T}\in A)$. — On développe :

$$q(\varepsilon)\sim E(1_{Z>0}X)\sim E(1_{Z_{n+1}>0}X_N)$$

avec :

$$Z_{n+1}=r_1+\varepsilon r_2+\ldots+\varepsilon^{n+1}r_{n+2}$$

et :

$$X_N=\exp\left\{-\frac{c}{\varepsilon}Z_{n+1}+\Phi g_1^2+c\,[\varepsilon(r_3-J_3)+\varepsilon^2(r_4-J_4)+\ldots]\right\}.$$

Pour cela, on remplace g_1, r_j, J_j par leurs expressions (§ 10) en termes de puissances de Y et on conditionne par la famille finie des G_{ji}, R_{ji}, J_{ji}; le cœur du calcul consiste à développer une intégrale gaussienne ne dépendant que de Y et ε, par un changement de variable solution d'une équation algébrique de degré n.

12. *Justification rigoureuse des calculs formels.* — Troncature de toutes les v. a. en vue au niveau $1/\varepsilon^{\gamma}$ avec $\gamma > 0$ petit et méticuleuses estimations.

APPENDICE

Compléments sur la fonctionnelle $\Lambda(A)$

A. 1. *Domaine de convexité stricte de l'énergie.* — Étude précise de l'énergie λ au voisinage (pour plusieurs topologies) de φ tel que $\lambda(\varphi)=0$; rayon de convexité.

A. 2. *Fonctionnelle de Cramer et ouverts convexes.* — Pour A ouvert convexe, on prouve $\Lambda(A)=\Lambda(\bar{A})=\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \log P(x^{\varepsilon}_{0,\,T} \in A)$, et si $\Lambda(A)$ est assez petit, l'unicité de $f \in \bar{A}$ tel que $\lambda(f)=\Lambda(A)=\Lambda(\bar{A})$.

A. 3. *Utilisation de l'équation locale de A.* — Étude de A et ∂A au voisinage de $f \in \partial A$ tel que $\lambda(f)=\Lambda(A)$; forme quadratique $[\lambda''(f)-c\,H''(f)]$ (*voir* plus haut les définitions de H, etc.); estimation de $\eta(A)$ fonctionnelle qui détermine l'ordre L des développements asymptotiques.

1. Système dynamique perturbé

1. 1. Le modèle

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Pour chaque $\varepsilon \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, considérons un champ de m-vecteurs $b_t(\varepsilon, t)$ et un champ de $(m \times k)$-matrices $s_t(y)$ sur U. Soit ω_t un brownien k-dimensionnel.

Considérons la famille d'équations différentielles stochastiques (d'Ito) sur U indexées par le paramètre $\varepsilon \geqslant 0$, *à coefficients dépendant du temps t*,

$$dx^{\varepsilon} = \varepsilon\, s(x^{\varepsilon})\, d\omega + b(\varepsilon, x^{\varepsilon})\, dt. \tag{1}$$

L'indice de temps t sera systématiquement muet dans les fonctions x^{ε}_t, s_t, b_t, les différentielles $d\omega_t$, dx^{ε}_t . . . Nos hypothèses sont les suivantes :

(2) Il existe N entier $\geqslant 0$ tel que, pour chaque $t \geqslant 0$, $b_t(\varepsilon, z)$ et $s_t(z)$ soient de classe $(N+3)$ en $\varepsilon \geqslant 0$, $z \in U$, avec leurs différentielles d'ordre $\leqslant N+3$

continues en
de b.

(3) Pour to
ble et on not

Il existe al
nous notons (
tions aléatoir

(4)

Dans tout
les x^{ε} et un
$x^0 \equiv \varphi$ vérifie

1. 2. Les es

Soit $C(U)$
muni de la n
des $g \in C(U)$
$g' \in L_2[0, T]$

En tout poi
identifiés au
systématique,
lieu de $C_0(\mathbb{R}^m$

2. Transfor

2. 1. Conve

L'indice de

$\int \Phi_t(g_t)\, d\omega_t$, qu

continues en $t \geqslant 0$. Noter l'inclusion de $\varepsilon = 0$ dans le domaine de régularité de b.

(3) Pour tout $t \geqslant 0$, $y \in U$, la matrice carrée $a_t(y) = s_t(y)\, s_t^*(y)$ est inversible et on note $\Gamma_t(y) = a_t(y)^{-1}$.

Il existe alors une unique diffusion minimale x^ε solution de (1) sur U; nous notons ζ^ε son temps d'explosion. Les x^ε modélisent de petites perturbations aléatoires du système dynamique limite (*déterministe*) :

$$d\varphi_t = b_t(0, \varphi_t)\, dt. \tag{4}$$

Dans tout ce texte, nous supposons *fixés le point initial $x \in U$ de tous les x^ε et un nombre $T > 0$ tel que le temps d'explosion déterministe ζ^0 de $x^0 \equiv \varphi$ vérifie $T < \zeta^0$.*

1.2. Les espaces C_x et C'_x

Soit $C(U)$ l'espace des fonctions continues sur $[0, T]$ à valeurs dans U, muni de la norme $\|\ \|_\infty$ usuelle. Appelons $C_x(U)$ le sous-espace affine des $g \in C(U)$ tels que $g_0 = x$. Notons $C'_x(U)$ l'espace des $g \in C_x(U)$ tels que $g' \in L_2[0, T]$ muni de la distance hilbertienne :

$$|||g - h||| = \left[\int_0^T |g' - h'|^2\, dt\right]^{1/2}.$$

En tout point, les espaces tangents à $C_x(U)$ et $C'_x(U)$ sont respectivement identifiés au Banach $C_0(\mathbb{R}^m)$ et au Hilbert $C'_0(\mathbb{R}^m)$. Par abus de langage systématique, nous écrivons C_x, C'_x au lieu de $C_x(U)$, $C'_x(U)$, et C_0, C'_0 au lieu de $C_0(\mathbb{R}^m)$, $C'_0(\mathbb{R}^m)$.

2. Transformée de Cramer

2.1. Convention

L'indice de temps t est muet dans les intégrales du genre $\int \Phi_t(g_t)\, dt$, $\int \Phi_t(g_t)\, d\omega_t$, que nous notons $\int \Phi(g)\, dt$, $\int \Phi(g)\, d\omega$. De plus, *pour $f \in C'_x$*, *nous notons* $\bar{f} \in L_2[0, T]$ *la fonction :*

(1) $$\bar{f}_t = f'_t - b_t(0, f_t).$$

2.2. RAPPELS

Au système perturbé 1.1 est associée une fonctionnelle $\lambda : C_x \to [0, +\infty]$, valant $+\infty$ hors de C'_x et donnée par, lorsque $f \in C'_x$,

(2) $$\lambda(f) = \frac{1}{2}\int_0^T \bar{f}^* a^{-1}(f)\, \bar{f}\, dt = \frac{1}{2}\int_0^T \bar{f}^* \Gamma(f)\, \bar{f}\, dt.$$

Suivant les contextes (*cf.* [7], [1], [12]), λ est appelée énergie, action, ou transformée de Cramer.

On sait (*cf.* [1]) que λ est semi-continue inférieurement sur C_x et qu'il existe $\alpha(x) > 0$ tel que l'ensemble $\{ g \in C_x \mid \lambda(g) \leq a \}$ soit compact dans C_x pour chaque $a < \alpha(x)$. D'ailleurs $\alpha(x)$ vaut :

$$\alpha(x) = \inf \{ \lambda(g) \mid g \in C_x,\ g[0, T[\subset U,\ \lim_{t \to T} g_t = \delta_U \},$$

où δ_U est le point à l'infini du compactifié de U. En particulier, λ atteint sa borne inférieure sur tout fermé de C_x rencontrant $\{ g \in C_x \mid \lambda(g) < \alpha(x) \}$.

Pour toute partie borélienne A de C_x, on pose :

(3) $$\Lambda(A) = \inf_{g \in A} \lambda(g)$$

et on a (*cf.* [12], [1]) :

(4) $$-\Lambda(\mathring{A}) \leq \underline{\lim}_{\varepsilon \to 0}\, \varepsilon^2 \log P(x^\varepsilon_{0,\,T} \in A)$$
$$\leq \overline{\lim}_{\varepsilon \to 0}\, \varepsilon^2 \log P(x^\varepsilon_{0,\,T} \in A) \leq -\Lambda(\bar{A}).$$

En particulier, pour A ouvert convexe de C_x, nous montrons (appendice A.2.1) que :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \log P(x^\varepsilon_{0,\,T} \in A) = -\Lambda(A) = -\Lambda(\bar{A})$$

et $P(x^\varepsilon_{0,\,T} \in A)$ devrait être « de l'ordre de » $\exp[-\Lambda(A)/\varepsilon^2]$. C'est ce que nous allons préciser ici par un développement asymptotique de $P(x^\varepsilon_{0,\,T} \in A)$.

Le résultat fondamental est le théorème 3.3 ci-dessous, que nous traduisons aussi dans le cadre des diffusions en temps petit.

2.3. LE

Sous les

C'_x *est de*

λ' et λ''. A

des nombr

Si $f \in C_x$

sur C'_0.

Nous m

3. Dévelo

3.1. LES

Soit A u

allons calc

type suivan

(1) Si Λ(

et des coeff

$P(x^\varepsilon_{0,}$

(2) Si Λ(

et des coeffi

3.2. LE C

Débarass

toire limite

à $\bar{A}$. Le cas

loin; par

$a_1 = a_2 = ..$

le fermé $\hat{A}$

petit, on au

2.3. LE RAYON DE CONVEXITÉ DE λ

Sous les hypothèses 1.(2) et 1.(3), il est clair que *la restriction de λ à C'_x est de classe $N+3$*; nous donnons au paragraphe 7 les expressions de λ' et λ''. Appelons *rayon de convexité de λ en x et notons $RC(x)$* le supremum des nombres ρ, $0 \leqslant \rho \leqslant \alpha(x)$ vérifiant :

Si $f \in C_x$ et $\lambda(f) < \rho$, alors la forme quadratique $\lambda''(f)$ est définie positive sur C'_0.

Nous montrons (appendice A.1.2) que l'*on a toujours $RC(x) > 0$.*

3. Développements asymptotiques de $P(x^\varepsilon_{0,\,T} \in A)$

3.1. LES DEUX TYPES DE DÉVELOPPEMENT

Soit A un borélien de C_x. Avec des hypothèses convenables sur A, nous allons calculer les coefficients et prouver la validité de développements du type suivant :

(1) Si $\Lambda(A) > 0$, il existe un entier L, un nombre M avec $L < M < L+1$ et des coefficients réels Λ_1, $a_1 \dots a_L$ tels que :

$$P(x^\varepsilon_{0,\,T} \in A) = e^{-(\Lambda(A)/\varepsilon^2) + (\Lambda_1/\varepsilon)}[a_1\,\varepsilon + a_2\,\varepsilon^2 + \dots + a_L\,\varepsilon^L + o(\varepsilon^M)].$$

(2) Si $\Lambda(A) = 0$, il existe un entier L, un nombre M avec $L < M < L+1$ et des coefficients réels $a_0 > 0$, $a_1 \dots a_L$, tels que :

$$P(x^\varepsilon_{0,\,T} \in A) = a_0 + a_1\,\varepsilon + \dots + a_L\,\varepsilon^L + o(\varepsilon^M).$$

3.2. LE CAS TRIVIAL $\varphi \in \mathring{A}$

Débarassons-nous d'emblée d'un cas trivial : lorsque $\Lambda(\mathring{A}) = 0$, la trajectoire limite déterministe $\varphi \equiv x^0$ donnée par 1.(4) appartient nécessairement à $\bar{A}$. Le cas $\varphi \in \partial A$ est couvert par (2) mais non trivial, et donc étudié plus loin; par contre, *le cas $\varphi \in \mathring{A}$ est trivial, car on a alors $a_0 = 1$, $a_1 = a_2 = \dots = a_L = 0$, et de plus L et M sont arbitraires.* En effet, si $\varphi \in \mathring{A}$, le fermé $\hat{A} = C_x - \mathring{A}$ vérifie $\Lambda(\hat{A}) > 0$, et donc, d'après 2.4, pour ε assez petit, on aura :

$$P(x^\varepsilon_{0,\,T} \in \hat{A}) \leqslant \exp\left(-\frac{1}{4}\,\frac{\Lambda(\hat{A})}{\varepsilon^2}\right),$$

d'où :

$$1-\exp\left(-\frac{1}{4}\,\frac{\Lambda(\bar{A})}{\varepsilon^2}\right)\leqslant P(x^{\varepsilon}_{0,\,T}\in \mathring{A})\leqslant P(x^{\varepsilon}_{0,\,T}\in A)\leqslant 1$$

et, par suite, pout tout entier L :

$$P(x^{\varepsilon}_{0,\,T}\in A)=1+o(\varepsilon^{L+1}),$$

ce qui prouve bien la validité de (2).

3.3. Théorème. — *Soit x^{ε} le système perturbé* 1.(1) *à coefficients de classe $N+3$, vérifiant* 1.(2) *et* 1.(3). *Soient λ la transformée de Cramer associée et $RC(x)$ son rayon de convexité en x. Soit A un ouvert convexe de C_x tel que $\Lambda(A)<RC(x)$, et supposons le bord ∂A de classe C^{∞}. Alors, les développements asymptotiques* (1) *et* (2) *ci-dessus pour $P(x^{\varepsilon}_{0,\,T}\in A)$ sont valides avec $L=N$ et M quelconque vérifiant $L<M<L+1$.*

Ce résultat est un corollaire du théorème technique 3.7 ci-dessous.

3.4. Hypothèses sur A

Nous allons supposer que le borélien A de C_x vérifie (3) et (4) ci-dessous :

(3) Il existe un unique point $f\in\bar{A}$ tel que $\lambda(f)=\Lambda(\bar{A})$.

(4) Si $f\in\partial A$, on suppose ∂A de classe $(n+3)$ au voisinage de f, c'est-à-dire l'existence d'une boule W de centre 0 et de rayon r dans $C_0(\mathbb{R}^m)$, et d'une fonction $G: f+W\to\mathbb{R}$ de classe $n+3$, telles que :

$$A\cap(f+W)=\{g\in C_x\,|\,G(g)>0\}.$$

3.5. Remarque

Dès que (3) est réalisée, le cas $f\in\mathring{A}$ implique $\Lambda(\mathring{A})$ fini, donc $f\in C'_x$, et par suite $\lambda'(f)=0$, ce qui (*cf.* appendice A.1.1) force $f\equiv\varphi$ et $\lambda(f)=\Lambda(\bar{A})=\Lambda(A)=0$. On se trouve alors dans le cas trivial 3.2 déjà étudié, *de sorte que, sous* (3) *et* (4), *nous pourrons supposer systématiquement* $f\in\partial A$.

Signalons (*cf.* appendice A.3.1) que (3) et (4) impliquent toujours $\lambda(f)=\Lambda(\bar{A})=\Lambda(A)=\Lambda(\mathring{A})$.

3.6. Re

Soit R(

(*cf.* appenc

l'assertion

Énonçor

avec 3.6, i

3.7. Th

($N+3$) vér

associée, R

de C_x véri

$\lambda(f)=\Lambda($

La form

$0<\eta(A)\leqslant$

(1) et (2) d

nombre M

Preuve.

nous donn

des dévelop

3.8. Est

La form

remarquer

pour tous l

que $\lambda(f)=$

précisions s

3.9. App

Sur un o

de temps d'

où β, σ so

(m, k)-matri

3.6. Remarque

Soit $RC(x)$ le rayon de convexité de λ en x (*cf.* 2.3). Alors (*cf.* appendice A.2.2), *pour A ouvert convexe de C_x et $\Lambda(A) < RC(x)$, l'assertion* (3) *est toujours vraie.*

Énonçons maintenant le résultat technique principal de ce travail qui, avec 3.6, implique le théorème 3.3.

3.7. Théorème. — *Soit x^ε un système perturbé à coefficients de classe $(N+3)$ vérifiant* 1.(1), 1.(2), 1.(3). *Soient λ la transformée de Cramer associée, $RC(x)$ son rayon de convexité en x. Soit A une partie borélienne de C_x vérifiant* 3.4, *donc de classe $(n+3)$ au voisinage de $f \in A$ tel que $\lambda(f) = \Lambda(A)$. Supposons $\Lambda(A) < RC(x)$ et A convexe au voisinage de f.*

La formule (10) *du paragraphe* 9 *ci-dessous fournit un nombre $\eta(A)$, avec $0 < \eta(A) \leqslant 1$, ayant la propriété suivante : les développements asymptotiques* (1) *et* (2) *de $P(x^\varepsilon_{0,\,T} \in A)$ sont valides à condition de prendre l'entier L et le nombre M tels que :*

$$L < M < \inf[N+1,\ (n+2)\,\eta(A)] \leqslant L+1.$$

Preuve. — La preuve de 3.7 occupe le reste de l'article. Bien entendu, nous donnons des formules probabilistes explicites pour les coefficients des développements (1) et (2).

3.8. Estimation de $\eta(A)$

La formule 9.(10) donnant $\eta(A)$ n'étant pas explicite, il est utile de remarquer que $\eta(A)$ tend vers 1 quand $\Lambda(A) \to 0$, et ceci uniformément pour tous les $A \subset C_x$ vérifiant 3.4 et convexes au voisinage du $f \in \bar{A}$ tel que $\lambda(f) = \Lambda(A)$. Nous renvoyons à l'appendice A.3.6 pour plus de précisions sur ce point.

3.9. Application aux diffusions en temps petit

Sur un ouvert U de $\mathbb{R}^m$, considérons la diffusion y_t de point initial x et de temps d'explosion ζ, définie par :

$$dy = \sigma(y)\,d\omega + \beta(y)\,dt,$$

où β, σ sont respectivement un champ de m-vecteurs et un champ de (m, k)-matrices sur U, de classe $N+3$, avec $\sigma\sigma^*$ inversible. Pour étudier la portion de trajectoire $y_{[0,\,\varepsilon^2]}$ quand $\varepsilon \to 0$, on fait (*cf.* [1]) le changement de temps $x_t^\varepsilon = y_{t\varepsilon^2}$ de sorte que x^ε vérifie :

$$dx^\varepsilon = \varepsilon\sigma(x^\varepsilon)\,d\bar{\omega} + \varepsilon^2\beta(x^\varepsilon)\,dt,$$

où $\bar{\omega}$ est un nouveau brownien k-dimensionnel, et on est ramené à étudier la trajectoire $x_{0,1}^\varepsilon$ dans $C_x(U)$. Si $A \subset C_x(U)$, le développement de $P(x_{0,1}^\varepsilon \in A)$ fournit des développements asymptotiques non triviaux pour des probabilités concernant $y_{[0,u]}$ avec $u \to 0$. Par exemple, si F est un ouvert convexe C^∞ de $(\mathbb{R}^m)^l$ et si $\alpha_1 \ldots \alpha_l$ sont des réels >0 fixés, on obtient ainsi, quand $u \to 0$, un développement asymptotique pour $P[(y_{u\alpha_1}, \ldots, y_{u\alpha_l}) \in F]$, de la forme :

$$e^{-\Lambda_0/u}[a_1 u^{1/2} + \ldots + a_L u^{L/2} + o(u^{M/2})],$$

lorsque $(x, \ldots, x) \notin \bar{F}$ et de la forme :

$$[a_0 + a_1 u^{1/2} + \ldots + a_L u^{L/2} + o(u^{M/2})],$$

quand $(x, \ldots, x) \in \bar{F}$. Signalons que, les systèmes perturbés impliqués dans ce contexte étant plus particulier que 1.(1) car ici $b_t(\varepsilon, z) = \varepsilon^2\beta(z)$ est nul pour $\varepsilon = 0$ ainsi que sa première dérivée en ε, on a toujours $\Lambda_1 = 0$ dans le développement générique 3.(1).

4. Localisation du calcul

4.1. Équation locale corrigée de A

Désormais on suppose toujours que A vérifie 3.4 avec de plus (au vu de la remarque 3.6) $f \in \partial A$, pour éviter le cas trivial 3.2. Soient donc $W \subset C_0$ et $G : W \to \mathbb{R}$ de classe $n+3$ comme en 3.(4) de sorte que :

$$A \cap (f + W) = \{\gamma \in f + W \mid G(\gamma) > 0\} \quad \text{et} \quad G'(f) \neq 0.$$

Posons $G_1 = G'(f)$ et soit $K \subset C_0$ le noyau de G_1. Fixons $h \in C_0'$ tel que $G_1 h = 1$. Alors, l'équation implicite :

(1) $$G(f + \psi(k)h + k) = 0, \qquad k \in K,$$

admet une
de 0 dans
(2)

et soit H :
suivante, V
(3)

Nous ap
petit (*cf.* ap
(4)

Posons :
(5)

Alors (*cf.* a
expliciter. E
(6)

où $p : C_0 \to$

Le rempl

4.2. Pass

Pour r as
atteint et d
inégalités 2.

(7) $P(x_{0,}^\varepsilon$

avec $c_1 \neq c_1$
$P(x_{0,T}^\varepsilon \in A)$

admet une unique solution locale $\psi : U_2 \to \mathbb{R}$, où U_2 est un petit voisinage de 0 dans K. Soit $u : C_x \to \mathbb{R}$ la fonctionnelle affine :

(2) $$u(\gamma) = G_1(\gamma - f),$$

et soit $H : f + V \to \mathbb{R}$ la fonctionnelle de classe $(n+3)$ définie par la formule suivante, V étant une boule de centre 0 et de rayon r assez petit dans C_0,

(3) $$H(\gamma) = u(\gamma) - \psi[\gamma - f - u(\gamma) h].$$

Nous appelons H *l'équation locale corrigée de A* car on a, pour r assez petit (*cf.* appendice A.3.2) :

(4) $$A \cap (f+V) = \{\gamma \in f+V \mid H(\gamma) > 0\}.$$

Posons :

(5) $$H_j = \frac{1}{j\,!} H^{(j)}(f), \qquad G_j = \frac{1}{j\,!} G^{(j)}(f).$$

Alors (*cf.* appendice A.3.3), les H_j sont polynômes en $G_1 \ldots G_j$ faciles à expliciter. En particulier :

(6) $$H_1 = G_1 \qquad \text{et} \qquad H_2 = G_2 \circ (p \otimes p),$$

où $p : C_0 \to K$ est la projection $p\gamma = \gamma - (G_1 \gamma) . h$.

Le remplacement de G par H sera essentiel au paragraphe 9 ci-dessous.

4.2. Passage de A a $A \cap (f+V)$

Pour r assez petit, le minimum de λ sur le fermé $\bar{A} \cap \{C_x - (f+V)\}$ est atteint et donc est strictement plus grand que $\lambda(f)$ d'après 3.(3). Les inégalités 2.(4) entraînent alors :

(7) $$P(x^\varepsilon_{0,T} \in A) = \left\{1 + 0\left[\exp\left(-\frac{c_1}{\varepsilon^2}\right)\right]\right\} P[x^\varepsilon_{0,T} \in A \cap (f+V)],$$

avec $c_1 = c_1(r) > 0$. Les développements asymptotiques 3.(1) ou 3.(2) pour $P(x^\varepsilon_{0,T} \in A)$ coïncideront donc avec ceux de $P[x^\varepsilon_{0,T} \in A \cap (f+V)]$.

4.3. Localisation par la formule de Girsanov

Prenons r assez petit pour que $(f+V) \subset C_x$. Posons $x^\varepsilon = f + y^\varepsilon$ de sorte que $y_0^\varepsilon = 0$ et :

(8) $$dy^\varepsilon = \varepsilon\, s(f+y^\varepsilon)\, d\omega + [b(\varepsilon, f+y^\varepsilon) - f']\, dt.$$

Définissons pour $t \geqslant 0$, $\varepsilon \geqslant 0$ un champ de vecteurs $B_t(\varepsilon, .)$ sur la boule de centre 0 et rayon r dans $\mathbb{R}^m$, par :

(9) $$B_t(\varepsilon, z) = b_t(\varepsilon, f_t + z) - b_t(0, f_t), \qquad \text{où} \quad t \leqslant T, \quad |z| \leqslant r.$$

Considérons les diffusions z^ε vérifiant $z_0^\varepsilon \equiv 0$, et :

(10) $$dz^\varepsilon = \varepsilon\, s(f+z^\varepsilon)\, d\omega + B(\varepsilon, z^\varepsilon)\, dt.$$

La loi de $y_{0,T}^\varepsilon$ admet une densité $\exp[-(1/\varepsilon^2) I(z^\varepsilon)]$ par rapport à celle de $z_{0,T}^\varepsilon$, avec (formule de Girsanov et conventions 1.1 et 2.1) :

(11) $$I(z^\varepsilon) = \int_0^T \bar{f} \cdot \Gamma(f+z^\varepsilon) \cdot \left[dz^\varepsilon - B(\varepsilon, z^\varepsilon)\, dt + \frac{1}{2} \bar{f}\, dt \right].$$

Par conséquent, on a :

(12) $$P[x_{0,T}^\varepsilon \in A \cap (f+V)] = E[1_A(f+y_{0,T}^\varepsilon)\, 1_V(y_{0,T}^\varepsilon)]$$
$$= E\left[1_{H(f+z^\varepsilon)>0}\, 1_V(z^\varepsilon) \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon^2} I(z^\varepsilon) \right) \right].$$

5. Polynômes et processus à queues exponentielles lentes

5.1. Les espaces $\mathscr{W}$ et $\mathscr{S}\mathscr{W} \subset \mathscr{W}$

Soit $W_t : \Omega \to E$ un processus aléatoire continu sur $[0, T]$ à valeurs dans un espace euclidien arbitraire E; notons :

(1) $$\| W \|_\infty = \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} | W_t |.$$

Nous dirons que $W \in \mathscr{W}$ *s'il existe* $\alpha > 0$, $c > 0$, *tels que :*

(2) $$P(\| W \|_\infty \geqslant s) \leqslant \exp(-c s^\alpha) \text{ pour tout } s \geqslant \frac{1}{c}.$$

Si W es
que $W \in \mathscr{W}$
Si W_t :
$W \in \mathscr{S}\mathscr{W}$
appartienn
dans les n
appartient
5.2. Po
Pour p,
$\Pi_t : [\mathbb{R}^k]^j$ –
aléatoires
$W_t = \Pi_t(W$
D'après [2
dans $\mathscr{S}\mathscr{W}$ (
5.3. Fo
Notons
$\Phi : \mathscr{C}^j \to \mathbb{R}$
$\Phi(Y_1$.
où Φ_0 est
symétrique
à $\mathscr{W}$, *alors*
6. Dével
Les coef
classe $N+$
Taylor sto
(1)
pour chaq
aléatoires s

Si W est un vecteur aléatoire indépendant du temps, nous dirons encore que $W \in \mathscr{W}$ si $P(|W| \geqslant s) \leqslant \exp(-cs^{\alpha})$.

Si $W_t : \Omega \to E$ est une *semi-martingale brownienne, nous dirons que* $W \in \mathscr{S}\mathscr{W}$ *si la partie à variations bornées et la partie martingale de* W *appartiennent à* $\mathscr{W}$. Remarquons que (*cf.* [2]) si un processus W à valeurs dans les matrices (l, k) est dans $\mathscr{S}\mathscr{W}$, alors le processus $U_t = \int_0^t W_s \, d\omega_s$ appartient encore à $\mathscr{S}\mathscr{W}$.

5.2. Polynômes

Pour p, l, j entiers, considérons une famille Π_t, $0 \leqslant t \leqslant T$ de polynômes $\Pi_t : [\mathbb{R}^k]^j \to \mathbb{R}^p$ à coefficients *continus* en t. Si $W^1 \ldots W^j$ sont des processus aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^l$, notons $W = \Pi(W^1 \ldots W^j)$ le processus $W_t = \Pi_t(W_t^1, \ldots, W_t^j)$. Nous dirons que l'application Π est un polynôme. D'après [2], *si* $W^1 \ldots W^j$ *sont dans* $\mathscr{S}\mathscr{W}$ (resp. $\mathscr{W}$), *alors* W *est encore dans* $\mathscr{S}\mathscr{W}$ (resp. $\mathscr{W}$).

5.3. Fonctionnelles polynomiales

Notons $\mathscr{C}$ l'espace $C(\mathbb{R}^l)$ défini en 1.2. Nous dirons que la fonctionnelle $\Phi : \mathscr{C}^j \to \mathbb{R}$ *est polynomiale* si :

$$\Phi(Y_1 \ldots Y_j) = \Phi_0 + \sum_{1 \leqslant k \leqslant p} \sum_{1 \leqslant j_1 \leqslant \ldots \leqslant j_k \leqslant j} \Phi_{j_1 \ldots j_k} \cdot Y_{j_1} Y_{j_2} \ldots Y_{j_k},$$

où Φ_0 est une constante et chaque $\Phi_{j_1 \ldots j_k}$ une fonctionnelle multilinéaire symétrique continue sur $\mathscr{C}^k$. *Si* $W^1 \ldots W^j$ *sont des processus appartenant à* $\mathscr{W}$, *alors la v. a. numérique* $\Phi(W^1 \ldots W^j)$ *est dans* $\mathscr{W}$ (*cf.* [2]).

6. Développement de Taylor stochastique de z^ε

Les coefficients de l'équation stochastique 4.(10) donnant z^ε étant de classe $N+3$, on sait (*cf.* [10], [5], [2]) que z^ε admet un développement de Taylor stochastique :

$$z^\varepsilon = \varepsilon g_1 + \varepsilon^2 g_2 + \ldots + \varepsilon^M g_M + \varepsilon^{M+1} \hat{g}_{M+1}, \tag{1}$$

pour chaque entier $M \leqslant N+3$. Les coefficients g_j sont des processus aléatoires sur $[0, T]$, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, indépendants de ε bien entendu, qui appartiennent à $\mathscr{SW}$ et se calculent explicitement par 6.3. Le reste aléatoire $\hat{g}_{M+1}$ dépend de t et ε, et on peut contrôler sa taille de façon précise (*cf.* [5], [2]).

Introduisons les notations :

(2) $$s_j(t)=\frac{1}{j\,!}\,\frac{\partial^j s_t}{\partial z^j}(f_t);\qquad b_{ij}(t)=\frac{1}{i\,!\,j\,!}\,\frac{\partial^{i+j} b_t}{\partial\varepsilon^i\,\partial z^j}(0, f_t).$$

Alors (*cf.* [2]), les g_j vérifient :

(3) $$\left\{\begin{array}{l} dg_1-b_{01}\,g_1\,dt=s_0\,d\omega+b_{10}\,dt,\\ dg_2-b_{01}\,g_2\,dt=s_1\,g_1\,.\,d\omega+(b_{02}\,g_1^2+b_{11}\,g_1+b_{20})\,dt,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ dg_{j+1}-b_{01}\,g_{j+1}\,dt=S_{j+1}(g_1\ldots g_j)\,d\omega+K_{j+1}(g_1\ldots g_j)\,dt, \end{array}\right.$$

où le temps t est muet. Les S_{j+1}, K_{j+1} sont des polynômes au sens 5.2, de degré j et $j+1$ lorsqu'on assigne à g_k le degré k. Pour résoudre (3), on introduit les matrices déterministes $R(t)$ d'ordre (m, m) vérifiant $R(0)=$ Identité et :

(4) $$R'(t)=b_{01}(t)\,R(t),$$

de sorte que $R(t)$ est inversible (*cf.* [2]), et les h_j définis par :

(5) $$g_j(t)=R(t)\,h_j(t),$$

vérifient le système en cascade suivant, intégrable par quadratures :

(6) $$\left\{\begin{array}{l} dh_1=\sigma_0\,d\omega+\beta_{10}\,dt,\\ dh_2=\sigma_1\,h_1\,.\,d\omega+(\beta_{02}\,h_1^2+\beta_{11}\,h_1+\beta_{20})\,dt,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ dh_{j+1}=U_{j+1}(h_1\ldots h_j)\,d\omega+V_{j+1}(h_1\ldots h_j)\,dt, \end{array}\right.$$

avec les notations (indice t muet) :

(7) $$\left\{\begin{array}{ll} \sigma_0=R^{-1}\,s_0; & \sigma_1=R^{-1}\,s_1\,R,\\ \beta_{10}=R^{-1}\,b_{10}; & \beta_{11}=R^{-1}\,b_{11}\,R;\\ \beta_{02}=R^{-1}\,b_{02}\,.\,(R\otimes R); & \beta_{20}=R^{-1}\,b_{20} \end{array}\right.$$

et où les]

(8)

Les h_j s
gaussiens.

7. Déve

Comme
de z^s avec
on obtient
et $N+2$, q

(1)

où $\tilde{J}_3$, $\tilde{J}_{N+}$
§ 7.8). Le

(2)

où Π_j, $\tilde{\Pi}_j$ s
j et $j-1$. Le
de tous ord

Les prem
différentiell
de 6.(2),

(3)

on a alors p

(4) $\lambda_1 g=$

(5) $\lambda_2 g^2=$

et où les polynômes U_{j+1}, V_{j+1} sont donnés par :

(8) $$U_{j+1}=R^{-1}S_{j+1}R^{\otimes j};\qquad V_{j+1}=R^{-1}K_{j+1}R^{\otimes j}.$$

Les h_j sont dans $\mathscr{S}\mathscr{W}$ (*cf.* [2]) et *on notera que h_1 et g_1 sont des processus gaussiens.*

7. Développement de Taylor stochastique de $I(z^\varepsilon)$

Comme dans [2], en combinant le développement de Taylor stochastique de z^ε avec les développements de Taylor ordinaires de $\Gamma_t(f_t+\,.\,)$ et $B_t(.\,,\,.)$, on obtient les développements de Taylor stochastiques de $I(z^\varepsilon)$, à l'ordre 2 et $N+2$, que nous écrirons :

(1) $$\begin{cases} I(z^\varepsilon)=J_0+\varepsilon J_1+\ldots+\varepsilon^{N+2}J_{N+2}+\varepsilon^{N+3}\hat{J}_{N+3}, \\ I(z^\varepsilon)=J_0+\varepsilon J_1+\varepsilon^2 J_2+\varepsilon^3\hat{J}_3, \end{cases}$$

où $\hat{J}_3$, $\hat{J}_{N+3}$ sont des restes que l'on peut contrôler quand il le faut (*cf.* [2], § 7.8). Le terme J_0 est constant et les v. a. numériques J_j, $j\geq 1$, s'écrivent :

(2) $$J_j=\int_0^T[\Pi_j(g_1\ldots g_j)\,dt+\tilde{\Pi}_j(g_1\ldots g_j)\,d\omega]$$

où Π_j, $\tilde{\Pi}_j$ sont des polynômes au sens du paragraphe 5, de degrés respectifs j et $j-1$. Les J_j appartiennent donc à $\mathscr{W}$ et ont en particulier des moments de tous ordres.

Les premiers termes J_0, J_1, J_2 s'écrivent de façon compacte à partir des différentielles en f de l'énergie λ. Avec les notations suivantes et celles de 6.(2),

(3) $$\lambda_j=\frac{1}{j\,!}\lambda^{(j)}(f);\qquad \Gamma_j(t)=\frac{1}{j\,!}\,\frac{\partial^j\Gamma_t}{\partial z^j}(f_t),$$

on a alors pour tout $g\in C_0'$:

(4) $$\lambda_1 g=\lambda'(f).g=\int_0^T \bar{f}^*.\Gamma_0.(dg-b_{01}g.dt)+\frac{1}{2}\int_0^T\bar{f}^*.\Gamma_1 g.\bar{f}dt,$$

(5) $$\lambda_2 g^2=\frac{1}{2}\lambda''(f)[g,g]=\frac{1}{2}\int_0^T(g'-b_{01}g)^*\Gamma_0(g'-b_{01}g)\,dt+\tilde{\lambda}_2 g^2,$$

où $\tilde{\lambda}_2$ est la forme quadratique :

$$(6)\quad \tilde{\lambda}_2 g^2 = \int_0^T \bar{f}^* [(-\Gamma_0 . b_{02} g^2 + \frac{1}{2}\Gamma_2 g^2 . \bar{f}) dt + \Gamma_1 g . (dg - b_{01} g\, dt)].$$

Remarquons que les formules (4) *et* (6) *gardent un sens évident lorsque g est une semi-martingale continue sur* $[0, T]$ *dont la partie à variations bornées appartient à C'_0 et* (4) *et* (6) *définissent alors des v. a. numériques. Par contre,* (5) *n'a plus de sens dans ce cas.*

Le calcul de J_0, J_1, J_2 (*cf.* [2]) introduit *trois constantes Λ_0, Λ_1, Λ_2 et une fonctionnelle linéaire déterministe $\mathscr{L} : C_0 \to \mathbb{R}$*, calculées à partir de f à l'aide des formules :

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\Lambda_0 = \lambda(f) = \Lambda(A), \\ &\Lambda_1 = \int_0^T \bar{f}^* . \Gamma_0 b_{10} . dt, \\ &\Lambda_2 = \int_0^T \bar{f}^* . \Gamma_0 b_{20} . dt, \end{aligned}\right.$$

$$\mathscr{L} g = \int_0^T \bar{f}^* . (\Gamma_0 . b_{11} g + \Gamma_1 g . b_{10}) dt, \quad \text{pour } g \in C_0.$$

On obtient (*cf.* [2], § 7.8) :

$$J_0 = \Lambda_0,$$
$$J_1 = -\Lambda_1 + \lambda_1 g_1,$$
$$J_2 = -\Lambda_2 - \mathscr{L} g_1 + \tilde{\lambda}_2 g_1^2 + \lambda_1 g_2.$$

8. Développement de Taylor stochastique de $H(f + z^\varepsilon)$

Comme H est de classe $(n+3)$ avec $H(f) = 0$, la v. a. numérique $H(f + z^\varepsilon)$ s'écrit, en combinant les développements de Taylor de z^ε et de $H(f + .)$:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} H(f + z^\varepsilon) &= \varepsilon r_1 + \varepsilon^2 r_2 + \ldots + \varepsilon^{n+2} r_{n+2} + \varepsilon^{n+3} \hat{r}_{n+3}, \\ H(f + z^\varepsilon) &= \varepsilon r_1 + \varepsilon^2 r_2 + \varepsilon^3 \hat{r}_3, \end{aligned}\right.$$

où $\hat{r}_{n+3}$, $\hat{r}_3$ sont des restes contrôlables si besoin est (*cf.* [2]). Pour chaque $j \geqslant 1$, la v. a. numérique r_j est une fonctionnelle polynomiale (*cf.* § 5) en $g_1 \ldots g_j$, de degré j. En particulier, *les r_j sont dans $\mathscr{W}$ et ont donc des moments de tous ordres.* On a en particulier :

$$(2) \qquad r_1 = H_1 g_1; \qquad r_2 = H_1 g_2 + H_2 g_1^2 \qquad \text{avec} \quad H_j = \frac{1}{j\,!} H^{(j)}(f).$$

9. Calcul du terme principal de $P(x^\varepsilon_{0,\,T} \in A)$

9.1. Proposition. — *Soient x^ε, A, λ, f vérifiant* 1.1 *et* 3.4. *Supposons $f \in \partial A$. Soit H l'équation locale corrigée de A en f* (cf. 4.1). *Alors, les dérivées $H_j = (1/j\,!)\, H^{(j)}(f)$ et $\lambda_j = (1/j\,!)\, \lambda^{(j)}(f)$ ont les propriétés suivantes : il existe un nombre $c \geqslant 0$ tel que :*

$$(1) \qquad \lambda_1 \equiv c\, H_1$$

et la forme quadratique $(\lambda_2 - c\, H_2)$ est positive ou nulle sur $K \cap C'_0$, où K est le noyau de H_1.

De plus, si A est convexe au voisinage de f et vérifie $\Lambda(A) < RC(x)$, où $RC(x)$ est le rayon de convexité de λ en x, alors la forme quadratique $(\lambda_2 - c\, H_2)$ est définie positive sur C'_0.

Preuve. — Renvoyons à l'appendice A.3.1 et A.3.2. *Le point essentiel ci-dessus est le fait que $(\lambda_2 - c\, H_2)$ soit définie positive sur C'_0.* Introduisons donc *l'hypothèse technique* suivante qui, grâce à 9.1, *est d'emblée vérifiée dans une large classe de situations.*

9.2. Les bons ensembles A

Désormais, nous supposerons que le borélien A de C_x vérifie 3.4, et que le $f \in \bar{A}$ tel que $\lambda(f) = \Lambda(A)$ est effectivement dans ∂A (seul cas non trivial). De plus, en notant $H : f + V \to \mathbb{R}$ l'équation locale corrigée de A en f définie par 4.1, nous supposerons que la forme quadratique $(\lambda_2 - c\, H_2)$ est définie positive sur C'_0, avec c comme en (1).

Renvoyons à l'appendice A.3.5 pour une analyse plus fine de cette dernière condition, *qui est toujours vraie pour A localement convexe en f et $\Lambda(A) < RC(x)$.*

9.3. PROPOSITION. — *Soient x^ε, A, λ, f, H vérifiant* 1.1, 9.2 *et* 4.1. *Avec les notations du paragraphe* 7, *définissons la fonction numérique* $\theta(\varepsilon)>0$, *et les v. a. numériques* $X>0$ *et* Z *(toutes deux liées à* ε*) par :*

$$\theta(\varepsilon)=\exp\left(-\frac{\Lambda_0}{\varepsilon^2}+\frac{\Lambda_1}{\varepsilon}+\Lambda_2\right),$$

$$X=\exp\left[-\frac{1}{\varepsilon}\lambda_1 g_1-\lambda_1 g_2+\mathscr{L} g_1-\tilde{\lambda}_2 g_1^2-\varepsilon \hat{J}_3\right], \tag{2}$$

$$H(f+z^\varepsilon)=\varepsilon Z;$$

de sorte que, d'après 7.(1), 7.(7), 7.(8), *on a :*

$$\exp\left[-\frac{1}{\varepsilon^2}I(z^\varepsilon)\right]=\theta(\varepsilon)X. \tag{3}$$

Alors, si le rayon r *de la boule* V *est assez petit, la fonction numérique* $q(\varepsilon)$ *définie par :*

$$q(\varepsilon)=E[1_{Z>0}\,1_V(z^\varepsilon)X], \tag{4}$$

reste bornée *quand* $\varepsilon\to 0$, *et* pour tout entier M, *on a :*

$$P(x^\varepsilon_{0,\,T}\in A)=\theta(\varepsilon)[q(\varepsilon)+o(\varepsilon^M)]. \tag{5}$$

Preuve. — Au vu de (3) et de 4.(12), on a immédiatement :

$$P[x^\varepsilon_{0,\,T}\in A\cap(f+V)]=\theta(\varepsilon)q(\varepsilon). \tag{6}$$

Le fait que $q(\varepsilon)$ reste borné quand $\varepsilon\to 0$ résulte du lemme technique 9.5 ci-dessous. On déduit alors directement (5) de (6) et 4.(7).

9.4. REMARQUE

Sous les hypothèses de 9.3, si $\Lambda(A)=0$, on a nécessairement $f\equiv\varphi$, où $\varphi'_t\equiv b_t(0,\varphi_t)$, donc $\bar{f}=0$, et, d'après 7.(7), on en tire :

$$\Lambda_0=\Lambda_1=\Lambda_2=0, \qquad \text{et} \qquad \mathscr{L}=0; \tag{7}$$

par suite, *dans ce cas*, $\theta(\varepsilon)\equiv 1$, *et pour tout entier* M *:*

$$P(x^\varepsilon_{0,\,T}\in A)=q(\varepsilon)+o(\varepsilon^M), \tag{8}$$

avec $q(\varepsilon)$ *bornée* comme ci-dessus.

9.5. LEMME TECHNIQUE (hypothèses 9.3). — *Soit ν la forme quadratique positive définie sur C_0' par :*

$$\nu g^2=\frac{1}{2}\int_0^T (g'-b_{01}g)^*\,\Gamma_0\,(g'-b_{01}g)\,dt,\qquad g\in C_0' \tag{9}$$

et considérons le nombre réel :

$$\eta=\eta(A)=\inf_{g\in C_0'-\{0\}}\left[\frac{(\lambda_2-cH_2)g^2}{\nu g^2}\right]. \tag{10}$$

Alors, on a $0<\eta(A)\leqslant 1$; de plus, pour tout $\alpha\in[1,\ 1/(1-\eta)[$, il existe $c_2=c_2(\alpha)>0$ tel que $\varepsilon\leqslant 1/c_2$ et $r\leqslant 1/c_2$ impliquent :

$$\|1_{Z>0}\,1_V(z^\varepsilon)\,X\|_\alpha\leqslant c_2(\alpha).$$

Preuve. — D'après (2) et le paragraphe 8, on a :

$$Z=r_1+\varepsilon r_2+\varepsilon^2\hat{r}_3=H_1g_1+\varepsilon(H_1g_2+H_2g_1^2)+\varepsilon^2\hat{r}_3,$$

et la partie principale à l'ordre 2 de $\log X$ s'écrit donc grâce à (1), (2) :

$$-\frac{1}{\varepsilon}\lambda_1g_1+\lambda_1g_2+\mathscr{L}g_1-\tilde{\lambda}_2g_1^2=-\frac{c}{\varepsilon}Z+\mathscr{L}g_1-Qg_1^2+c\,\varepsilon\,\hat{r}_3, \tag{11}$$

où Q est une forme quadratique sur C_0' définie par :

$$Q=\tilde{\lambda}_2-cH_2, \tag{12}$$

forme quadratique qui se prolonge trivialement aux semi-martingales de $\mathscr{S}\mathscr{W}$, comme nous l'avons vu au paragraphe 7. De (2).(11), on tire :

$$X=X_1X_2X_3,$$

avec :

$$X_1=\exp\left(-\frac{c}{\varepsilon}Z\right);\qquad X_2=\exp(\mathscr{L}g_1-Qg_1^2); \tag{13}$$

$$X_3=\exp(c\,\varepsilon\,\hat{r}_3-\varepsilon\hat{J}_3).$$

D'après [2], il existe une constante $c_3>0$ telle que, pour tout $s\geqslant 1/c_3$, on ait :

$$(14)\qquad \begin{cases} P(z^\varepsilon\in V;\ |\varepsilon\hat{r}_3|\geqslant s)\leqslant \exp\left(-c_3\dfrac{s}{r}\right), \\ P(z^\varepsilon\in V;\ |\varepsilon\hat{J}_3|\geqslant s)\leqslant \exp\left(-c_3\dfrac{s}{r}\right), \end{cases}$$

où r est le rayon de la boule $V\subset C_0$. Pour tout $\alpha>0$, il existe donc $c_4=c_4(\alpha)>0$ tel que :

$$(15)\qquad \|1_V(z^\varepsilon)X_3\|_\alpha\leqslant c_4,\quad \text{pourvu que } \varepsilon\leqslant 1/c_4,\quad r\leqslant 1/c_4.$$

D'autre part, puisque $c\geqslant 0$, il est évident que :

$$(16)\qquad 1_{z>0}X_1 \text{ est une v. a. comprise entre 0 et 1.}$$

La v. a. $\mathscr{L}g_1$ est gaussienne, car g_1 est un processus gaussien et $\mathscr{L}$ est linéaire continue, de sorte que :

$$(17)\qquad \exp\mathscr{L}g_1 \text{ a des moments de tous ordres.}$$

D'après l'hypothèse 9.2, la forme quadratique (λ_2-cH_2) est définie positive sur C_0'. Le lemme 9.6 ci-dessous et la relation $\lambda_2=\tilde{\lambda}_2+\nu$ impliquent alors :

(18) la v. a. $\exp(-Qg_1^2)=\exp[-(\tilde{\lambda}_2-cH_2)g_1^2]$ est dans $L_\alpha(\Omega)$ pour $1\leqslant\alpha<1/1-\eta$, où $\eta\in]0,1]$ est donné par (10).

De (17), (18), on déduit :

$$(19)\qquad \|X_2\|_\alpha \text{ est fini pour } 1\leqslant\alpha<1/1-\eta.$$

Puisque $X=X_1X_2X_3$, l'inégalité de Hölder et (15), (16), (19) terminent la preuve du lemme. Précisons le point technique crucial utilisé ci-dessus.

9.6. LEMME. — *Soit g_1 la diffusion gaussienne donnée par* 6.(3). *La forme quadrative positive ν définie par* (9) *sur C_0' n'est autre que la transformée de Cramer associée à la diffusion g_1 en temps petit* (cf. [1]). *Soit F une forme quadratique continue quelconque sur C_0. Pour que la v. a. $\exp(-Fg_1^2)$ soit d'espérance finie, il est nécessaire que $(F+\nu)\geqslant 0$ sur C_0' et*

il suffit qu

vérifie 0·
$1\leqslant\alpha<1/1$

Preuve.
est en fait

nelle du t

d'utiliser c
se passe
$\exp(-\nu g^2$

10. Rela

Posons
continue,
essentiel da
(probabilis
grossisseme
qu'une dis
présente ur
nien ω, ne r
Nous avon
filtration ([

10.1. L'

Nous dir
appartient
processus W

(1)

Si W est
numériques
sont pas ada

il suffit que $(F+\nu)>0$ *sur* $C'_0-\{0\}$. *Dans ce dernier cas, le nombre :*

$$u=\inf_{g\in C'_0-\{0\}}\frac{(F+\nu)g^2}{\nu g^2},$$

vérifie $0<u\leqslant 1$ *et* $\exp(-Fg_1^2)$ *admet un moment d'ordre* α *pour* $1\leqslant\alpha<1/1-u$.

Preuve. — Renvoyons à [2] qui traite un cas un peu plus général où F est en fait combinaison d'une forme quadratique continue et d'une fonctionnelle du type $\int\Phi_t g_t\,dg_t$; c'est d'ailleurs ce cas plus général qu'il convient d'utiliser dans la preuve de 9.5 ci-dessus. Intuitivement en tout cas, tout se passe comme si g_1 avait sur C_0 une « densité » proportionnelle à $\exp(-\nu g^2)$, car 2ν est essentiellement l'inverse de la variance de g_1.

10. Relations de dépendance entre les g_j, r_j et $Y=H_1 g_1$

Posons $Y=H_1 g_1$. Comme g_1 est gaussienne et $H_1=H'(f)$ linéaire continue, la v.a. numérique Y est gaussienne et $\mathscr{F}_T$-mesurable. Il sera essentiel dans les calculs ci-dessous de clarifier complètement la dépendance (probabiliste) des g_j et de Y. Ce problème peut être abordé à l'aide du *grossissement de la filtration brownienne* $\mathscr{F}_t$ *par* Y, mais cette méthode, qu'une discussion avec M. Chaleyat-Maurel nous a aidé à clarifier, présente une difficulté technique : quand $H'(f)$ est quelconque, le brownien ω_t ne reste pas toujours une semi-martingale sur $\mathscr{F}_t\vee Y$ pour $t\in[0, T]$. Nous avons donc préféré éviter ici l'utilisation des grossissements de filtration ([9], [6]).

10.1. L'espace $\mathscr{P}\subset\mathscr{W}$

Nous dirons qu'un processus aléatoire $W(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, défini sur Ω appartient à $\mathscr{P}$ s'il existe un entier $l\geqslant 0$, un espace euclidien F, et des processus $W_j(t):\Omega\to F$, $0\leqslant j\leqslant l$, appartenant à $\mathscr{S}\mathscr{W}$ (*cf.* § 5.1) tels que :

$$W=\sum_{0\leqslant j\leqslant l} Y^j W_j. \tag{1}$$

Si W est une v.a. numérique, nous dirons que $W\in\mathscr{P}$ s'il existe des v.a. numériques $W_j\in\mathscr{W}$ liées à W par (1). Noter que *les processus* $W\in\mathscr{P}$ *ne sont pas adaptés à la filtration* $(\mathscr{F}_t)$ *en général.*

Du paragraphe 5, on déduit que les polynômes — au sens 5.2 — et les fonctionnelles polynomiales — au sens 5.3 — définis sur $\mathscr{W}^J$ envoient nécessairement $\mathscr{P}^J$ dans $\mathscr{P}$.

10.2. Intégration stochastique dans $\mathscr{P}$

Il existe clairement $S \in]0, T]$ tel que Y soit $\mathscr{F}_S$-mesurable, mais ne soit pas $\mathscr{F}_s$-mesurable pour $s < S$. Si $W \in \mathscr{P}$, $W(t)$ est alors $\mathscr{F}_t$-mesurable pour $S \leqslant t \leqslant T$ et $1_{[S, T]}(t)\, W(t)$ est une semi-martingale continue. Soit $W \in \mathscr{P}$ un processus à valeurs dans les matrices (l, k) et *cherchons à définir l'intégrale* $U(t) = \int_0^t W(s)\, d\omega_s$. Si $W \in \mathscr{S}\mathscr{W}$, il s'agit d'une intégrale stochastique usuelle et (*cf.* 5.1) U appartient alors à $\mathscr{S}\mathscr{W}$.

Dans le cas général, $W \in \mathscr{P}$ vérifie une relation du type (1), et *celle-ci définit les* $W_j(t)$, $0 \leqslant j \leqslant l$ *de façon unique pour* $0 \leqslant t < S$: en effet, une équation algébrique du type $\sum_{0 \leqslant j \leqslant l} Y^j \tilde{W}_j(t) = 0$, où les $\tilde{W}_j(t)$ sont $\mathscr{F}_t$-mesurables non identiquement nuls, forcerait la $\mathscr{F}_t$-mesurabilité de Y qui est fausse pour $0 \leqslant t < S$. *Sans ambiguïté, on peut donc définir* U *sur* $[0, S]$ *par :*

$$\text{(2)} \qquad \mathrm{U}(t) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant l} Y^j \int_0^t W_j(s)\, d\omega_s = \sum_{0 \leqslant j \leqslant l} Y^j U_j(t),$$

où les $U_j \in \mathscr{S}\mathscr{W}$. *Pour* $S \leqslant t \leqslant T$, *on définit directement :*

$$\text{(3)} \qquad U(t) = U(S) + \int_S^t W(s)\, d\omega_s,$$

car $1_{[ST]}(t)\, W(t) \in \mathscr{S}\mathscr{W}$; ainsi la formule (2) reste valable pour $0 \leqslant t \leqslant T$, d'où $U \in \mathscr{P}$.

10.3. Décomposition du brownien ω

La forme linéaire continue $H_1 = H'(f)$ s'écrit :

$$\text{(4)} \qquad H_1 g = \int_0^T d\mathscr{M}(s)\, g_s \quad \text{pour} \quad g \in C_0,$$

où $\mathscr{M}$ est une mesure de Radon à valeurs dans les matrices lignes $(1, m)$, et $g_s \in \mathbb{R}^m$ est considéré comme matrice colonne $(m, 1)$. Définissons la fonction à variations bornées $\mathcal{R} : [0, T] \to \mathbb{R}^m$ à valeurs matrices colonnes $(1, m)$ par :

$$\mathcal{R}(t)^* = \int_t^T d\mathcal{M}(s) R(s), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

où les matrices carrées $R(t)$ telles que $g_1(t) = R(t) h_1(t)$ sont données par 6.(4).

On a alors :

$$Y = H_1 g_1 = \int_0^T d\mathcal{M}(s) g_1(s) = -\int_0^T d\mathcal{R}(s)^* h_1(s).$$

Intégrons par parties en tenant compte de 6.(6) et 6.(7) pour avoir :

(5) $$Y = \int_0^T \mathcal{R}^* dh_1 = \int_0^T \mathcal{R}^* \sigma_0 \, d\omega + \int_0^T \mathcal{R}^* \beta_{10} \, dt;$$

d'où facilement l'expression de $\mu = E(Y)$ et $\rho = \operatorname{var}(Y)$.

$$\mu = E(Y) = \int_0^T \mathcal{R}^* \beta_{10} \, dt$$

(6) et :

$$\rho = \operatorname{var}(Y) = \int_0^T \mathcal{R}^* \sigma_0 \sigma_0^* \mathcal{R} \, dt.$$

Le processus gaussien, non centré $\tilde{\omega}_t$, défini par :

(7) $$\omega_t = \tilde{\omega}_t + Y v(t),$$

avec $v : [0, T] \to \mathbb{R}^k$ fonction *déterministe* adéquate, sera *indépendant de Y* pourvu que $E[(Y - EY)(\tilde{\omega}_t - E\tilde{\omega}_t)] \equiv 0$, ce qui donne :

(8) $$v(t) = \frac{1}{\rho} E\left[\left(\int_0^T \mathcal{R}^*(s) \sigma_0(s) \, d\omega_s\right) . \omega_t\right] = \frac{1}{\rho} \int_0^t \sigma_0^* \mathcal{R} \, ds$$

et *la fonction déterministe v est à dérivée bornée sur* $[0, T]$.

Pour tout processus $W \in \mathscr{P}$, et à valeurs dans les matrices (l, k), l arbitraire, *nous définirons le processus* $U_t = \int_0^t W\, d\tilde{\omega}$ *par* :

$$\int_0^t W\, d\tilde{\omega} = \int_0^t W\, d\omega - Y \int_0^t W\, dv, \tag{9}$$

où le second membre est bien défini grâce au paragraphe 10.2 et à (8).

10.4. Lemme. — *Soit* $W \in \mathscr{P}$, *à valeurs matrices* (l, k). *Alors, le processus* $U(t) = \int_0^t W\, d\tilde{\omega}$ *défini par* (9) *est dans* $\mathscr{P}$. *De plus, si la v. a.* Y *est indépendante du processus* W, *alors* Y *est indépendante du processus* U.

Preuve. — L'assertion $\{U \in \mathscr{P}\}$ résulte de (9) et 10.2. De plus, (9) et 10.2 montrent qu'on peut approcher, au sens des limites presque sûres, $U(t)$ par des sommes de Riemann du type $\sum_{0 \leq l \leq j} W(t_l)(\tilde{\omega}_{t_{l+1}} - \tilde{\omega}_{t_l})$, lesquelles sont bien sûr indépendantes de Y dès que les $W(t_l)$ le sont, ce qui entraîne l'indépendance de $U(t)$ et Y, car Y et $\tilde{\omega}$ sont indépendants par construction.

10.5. Proposition (hypothèses 1.1). — Considérons les semi-martingales g_j et les v. a. J_j, r_j définies aux paragraphes 6, 7, 8. Il existe des processus $G_{ji} \in \mathscr{P}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, et des v. a. J_{ji}, $R_{ji} \in \mathscr{P}$ telles que les G_{ji}, J_{ji}, R_{ji} soient indépendants de Y et vérifient pour $1 \leq j \leq N+2$:

$$\begin{cases} G_j = \sum_{0 \leq i \leq j} Y^i G_{ji}, \\ J_j = \sum_{0 \leq i \leq j} Y^i J_{ji}, \\ r_j = \sum_{0 \leq i \leq j} Y^i R_{ji}. \end{cases} \tag{11}$$

En particulier, les G_{ji}, J_{ji}, r_{ji} sont dans $\mathscr{W}$ et ont des moments de tous ordres.

Preuve. — Appelons Q_j l'espace des processus (resp. v. a.) $W_j \in \mathscr{P}$ de la forme :

$$W_j = \sum_{0 \leq i \leq j} Y^i W_{ji}, \tag{12}$$

où les W_{ji} sont des processus (respectivement des v. a.) indépendants de Y à valeurs dans le même espace euclidien que W et appartiennent à $\mathscr{P}$.

Considérons des $W_i \in Q_i$, $1 \leq i \leq j$ et soit $S = \Pi(W_1, \ldots, W_j)$, avec Π polynôme ou fonctionnelle polynomiale quelconque au sens du paragraphe 5.

(13) *Supposons* Π *de degré total* j *lorsqu'on pose degré* $W_j = j$. *Un calcul élémentaire et la stabilité de* $\mathscr{P}$ *par applications polynomiales montre qu'alors* $S \in Q_j$.

(14) *D'autre part, si* $W_j \in Q_j$ *est à valeurs dans l'espace des matrices* (l, k), *alors* $U(t) = \int_0^t W_j \, d\omega$ *appartient à* Q_{j+1}.

En effet, (12) et la relation $d\omega = d\tilde{\omega} Y \, dv$ donnent :

$$U = \sum_{0 \leqslant i \leqslant j+1} Y^i U_{ji},$$

avec $dU_{ji} = W_{ji} \, d\tilde{\omega} + W_{j, i-1} \, dv$ et la convention $W_{j, -1} = W_{j, j+1} = 0$; d'après 10.4, les U_{ji} sont bien dans $\mathscr{P}$ et indépendants de Y.

Les remarques (13) et (14) démontrent par une récurrence immédiate basée sur 6.(6) que les $h_j \in Q_j$ et donc que les $g_j = R h_j \in Q_j$ puisque la fonction $R(t)$ est déterministe bornée à valeurs matricielles. On a vu aux paragraphes 7 et 8 que les r_j sont des fonctionnelles polynomiales des $g_1 \ldots g_j$ et les J_j des intégrales (en $d\omega$ et dt) de polynômes en $g_1 \ldots g_j$ (formule 7.(2)). Toujours grâce à (13) et (14), on en déduit que r_j et J_j sont dans Q_j.

10.6. Remarque

Les G_{ji}, r_{ji}, J_{ji} peuvent se calculer explicitement après un nombre fini d'intégrations successives en $d\omega_t$ et en dt. Par récurrence, on vérifie facilement que les G_{jj}, J_{jj}, R_{jj} sont déterministes et que la fonction $G_{jj}(t)$ est à dérivée bornée. Les premiers termes valent (notations 6.(4), 6.(7)) :

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} & G_{10} = RH_{10}; \qquad G_{11} = RH_{11}; \qquad G_{20} = RH_{20}, \\ & dH_{10} = \sigma_0 \, d\tilde{\omega} + \beta_{10} \, dt = \sigma_0 \, d\omega - Y \sigma_0 \, dv + \beta_{10} \, dt; \\ & dH_{11} = \sigma_0 \, dv; \quad dH_{20} = \sigma_1 H_{10} \, d\tilde{\omega} + (\beta_{02} H_{10}^2 + \beta_{11} H_{10} + \beta_{20}) \, dt, \\ & R_{10} = 0; \qquad R_{11} = 1; \qquad R_{20} = H_1 G_{20} + H_2 G_{10}^2. \end{aligned} \right.$$

11. Calcul formel du développement de $P(x_{0, T}^{\varepsilon} \in A)$

Dans ce paragraphe, *une bonne partie des calculs est purement formelle, mais tous les résultats seront justifiés rigoureusement au paragraphe* 12.

Pour avoir le développement asymptotique de $P(x^{\varepsilon}_{0,\,T}\in A)$, il suffit (proposition 9.3) de calculer une approximation polynomiale adéquate de $q(\varepsilon)=E[1_{Z>0}\,1_V(z^{\varepsilon})\,X]$. Rappelons que $(n+3)$ est la classe de ∂A en f et $(N+3)$ la classe des coefficients de dx^{ε}.

11.1. Réduction a une intégrale gaussienne par conditionnement

Posons :

(1) $$Z_{n+1}=r_1+\varepsilon r_2+\ldots+\varepsilon^{n+1} r_{n+2},$$

(2) $$J=c(\varepsilon r_3+\varepsilon^2 r_4+\ldots+\varepsilon^n r_{n+2})-(\varepsilon J_3+\varepsilon^2 J_4+\ldots+\varepsilon^N J_{N+2}),$$

de sorte que 8.(1), 9.(2), 9.(13) impliquent :

(3) $$\begin{gathered} Z=Z_{n+1}+\varepsilon^{n+2}\hat{r}_{n+3}, \\ X=\exp\left[-\frac{c}{\varepsilon}Z_{n+1}+(\mathscr{L}g_1-Q\,g_1^2)+J-\varepsilon^{N+1}\hat{J}_{N+3}\right]. \end{gathered}$$

Nous allons remplacer *formellement* Z par Z_{n+1} et X par X_N avec :

(4) $$X_N=\exp\left[-\frac{c}{\varepsilon}Z_{n+1}+(\mathscr{L}g_1-Q\,g_1^2)+J\right],$$

pour écrire formellement :

(5) $$q(\varepsilon)=E[1_{Z>0}\,1_V(z^{\varepsilon})\,X]\simeq E(1_{Z_{n+1}>0}\,X_N).$$

Noter que l'espérance au second membre n'a pas de sens sauf si dans (4) et (5), on remplace $\exp(J)$ par la série formelle $\sum_{j\geq 0} J^j/j\,!$. Exprimons g_1 et les r_j, J_j comme polynômes en Y (*cf.* 10.(11)) à coefficients indépendants de Y, ce qui donne par substitution :

(6) $$\left\{\begin{aligned} & Z_{n+1}=F(\varepsilon,\,Y)=Y+\textstyle\sum_{1\leq j\leq n+1}\sum_{0\leq i\leq j+1} R_{j+1,\,i}\,Y^i\,\varepsilon^j, \\ & J=J(\varepsilon,\,Y)=c\,[\textstyle\sum_{1\leq j\leq n}\sum_{0\leq i\leq j+2} R_{j+1,\,i}\,Y^i\,\varepsilon^j] \\ & \qquad\qquad -[\textstyle\sum_{1\leq j\leq N}\sum_{0\leq i\leq j+2} J_{j+2,\,i}\,Y^i\,\varepsilon^j], \\ & \mathscr{L}g_1-Q\,g_1^2=Q_0+YQ_1+Y^2Q_2=\Pi(Y). \end{aligned}\right.$$

Soit Δ

(7) $\Delta=$

Remarq
à $\mathscr{W}$.

Notor
particuli
nômes e

(8)

Dans (
calculer
moyenne

(9) $\mathscr{I}=$

où Δ est
Consid
ε, u, R_{ji} s

(10)

Elle adme
du type :

(11)

Les Φ_{ij} s

avec :

$$Q_0 = \mathscr{L}\, G_{10} - Q G_{10}^2,$$
$$Q_1 = \mathscr{L}\, G_{11} - 2\, Q\,(G_{10}, G_{11}),$$
$$Q_2 = -Q G_{11}^2 \quad \text{(}\textit{noter que } Q_2 \textit{ est déterministe}\text{)}.$$

Soit Δ *le vecteur aléatoire ayant pour coordonnées :*

(7) $\Delta = \{ Q_0;\ Q_1;\ J_{ji}$ avec $0 \leqslant i \leqslant j,\ 3 \leqslant j \leqslant N+2;$

R_{ji} avec $0 \leqslant i \leqslant j,\ 2 \leqslant j \leqslant n+2 \}$.

Remarquons que par construction Δ *est indépendant de* Y *et appartient à* $\mathscr{W}$.

Notons $\mathbb{R}[\Delta]$ l'ensemble des polynômes en Δ à coefficients constants. En particulier $Z_{n+1} = F(\varepsilon, Y)$, $J = J(\varepsilon, Y)$, $\mathscr{L} g_1 - Q g_1^2 = \Pi(Y)$ sont des polynômes en ε, Y à coefficients dans $\mathbb{R}[\Delta]$. Ces définitions donnent :

(8) $$X_N = \exp\left[-\frac{c}{\varepsilon} F(\varepsilon, Y) + \Pi(Y) + J(\varepsilon, Y) \right] = \exp M(\varepsilon, Y).$$

Dans (5), nous allons remplacer $E(.)$ par $E(E(.\,|\,\Delta))$ et commencer par calculer $E(.\,|\,\Delta)$. Comme Y est indépendante de Δ et gaussienne de moyenne μ et de variance ρ, calculées en 10.6, on voit que *formellement :*

(9) $$\mathscr{I} = E(1_{Z_{n+1}>0} X_N \,|\, \Delta)$$
$$= \int_{\mathbb{R}} 1_{F(\varepsilon, y)>0} [\exp M(\varepsilon, y)] \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \exp - \frac{(y-\mu)^2}{2\rho} \right] dy,$$

où Δ est considéré comme constant au second membre.

Considérons l'équation algébrique suivante, où y est l'inconnue et les ε, u, R_{ji} sont donnés,

(10) $$F(\varepsilon, y) \equiv y + \textstyle\sum_{1 \leqslant j \leqslant n+1} \sum_{0 \leqslant i \leqslant j+1} R_{j+1,\,i}\, y^i \varepsilon^j = u.$$

Elle admet une unique solution $y = \Phi(\varepsilon, u)$ *dans l'espace des séries formelles du type :*

(11) $$\Phi(\varepsilon, u) = \textstyle\sum\sum_{(i \geqslant 0,\, j \geqslant 0,\, i+j \geqslant 1)} \Phi_{ij}\, \varepsilon^i u^j.$$

Les Φ_{ij} sont des polynômes (à coefficients entiers) en R_{lq}, $0 \leqslant q \leqslant l$,

$2 \leqslant q \leqslant n+2$, qui s'obtiennent explicitement par identification et récurrence; on a par exemple :

$$(12)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \Phi_{01}=1; & \Phi_{10}=-R_{20}, & \\ \Phi_{02}=0; & \Phi_{11}=-R_{21}; & \Phi_{20}=R_{21}R_{20}-R_{30}; \end{array}\right.$$

et d'ailleurs, $\Phi_{0j} \equiv 0$ pour $j \geqslant 2$. En particulier, les Φ_{ij} sont dans $\mathbb{R}[\Delta]$.

A ce stade, les calculs deviennent très différents dans les cas $\Lambda(A)>0$ et $\Lambda(A)=0$.

11.2. Le cas $\Lambda(A)>0$

On a alors $c>0$ d'après l'appendice A.3.1. Pour étudier l'intégrale $\mathcal{J}$ on fait le changement de variable *formel* :

$$(13)\qquad \left\{\begin{array}{l} y=\Phi(\varepsilon, \varepsilon s)=\sum\sum_{(i \geqslant 0,\, j \geqslant 0,\, i+j \geqslant 1)} \Phi_{ij}\, \varepsilon^{i+j} s^j=\sum_{l \geqslant 1} \varepsilon^l\, \Pi_l(s), \\ dy=[\sum_{l \geqslant 1} \varepsilon^l\, \Pi_l'(s)]\, ds, \end{array}\right.$$

où les $\Pi_l(s)$ sont des polynômes en s à coefficients dans $\mathbb{R}[\Delta]$ donnés par :

$$(14)\qquad \left\{\begin{array}{l} \Pi_1(s)=-R_{20}+s, \\ \Pi_l(s)=\sum_{0 \leqslant j \leqslant l-1} \Phi_{l-j,\,j}\, s^j, \qquad \text{pour} \quad l \geqslant 2. \end{array}\right.$$

D'après (8), on a :

$$(15)\qquad M(\varepsilon, y)-\frac{(y-\mu)^2}{2\rho}=-\frac{c}{\varepsilon}F(\varepsilon, y)+\tau(y)+J(\varepsilon, y),$$

avec :

$$(16)\qquad \tau(y)=\Pi(y)-\frac{(y-\mu)^2}{2\rho}=\left(Q_0-\frac{\mu^2}{2\rho}\right) +\left(Q_1+\frac{\mu}{\rho}\right)y+\left(Q_2-\frac{1}{2\rho}\right)y^2.$$

Il est clair que *formellement* :

$$(17)\qquad \tau[\Phi(\varepsilon, \varepsilon s)]+J(\varepsilon, \Phi(\varepsilon, \varepsilon s)) \equiv \sum_{i \geqslant 0} \varepsilon^i \gamma_i(s),$$

où les $\gamma_i(s)$ sont des polynômes en s à coefficients dans $\mathbb{R}[\Delta]$. Les premiers termes valent :

$$\gamma_0(s) \equiv Q_0 - \frac{\mu^2}{2\rho} = \gamma_0,$$

$$\text{(18)} \qquad \gamma_1(s) \equiv \left(Q_1 + \frac{\mu}{\rho}\right)\Pi_1(\rho) + c R_{30} - J_{30} = \left(Q_1 + \frac{\mu}{\rho}\right)s + \left[c R_{30} - J_{30} - R_{20}\left(Q_1 + \frac{\mu}{\rho}\right)\right].$$

Comme $F(\varepsilon, \Phi(\varepsilon, \varepsilon s)) \equiv \varepsilon s$, la substitution $y = \Phi(\varepsilon, \varepsilon s)$ donne finalement d'après (15) et (18) :

$$\text{(19)} \qquad M(\varepsilon, y) - \frac{(y-\mu)^2}{2\rho} = -cs + \gamma_0 + \textstyle\sum_{i \geq 1} \varepsilon^i \gamma_i(s).$$

Notons $\mathrm{EXP}(S) = \sum_{j \geq 0} S^j/j\,!$, et écrivons *formellement* :

$$\text{(20)} \qquad \exp\left[M(\varepsilon, y) - \frac{(y-\mu)^2}{2\rho}\right] = e^{\gamma_0} e^{-cs}\, \mathrm{EXP}\left[\textstyle\sum_{i \geq 1} \varepsilon^i \gamma_i(s)\right],$$

de sorte que l'intégrale (9) devient *formellement*, après le changement de variable (13) :

$$\text{(21)} \qquad \mathscr{I} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\, e^{\gamma_0} \int_0^{+\infty} ds\, e^{-cs}\left[\textstyle\sum_{l \geq 1} \varepsilon^l \Pi_l'(s)\right] \mathrm{EXP}\left[\textstyle\sum_{i \geq 1} \varepsilon^i \gamma_i(s)\right].$$

Le facteur de $(ds\, e^{-cs})$ sous l'intégrale s'écrit *formellement* :

$$\text{(22)} \qquad \left(\textstyle\sum_{l \geq 1} \varepsilon^l \Pi_l'(s)\right) \mathrm{EXP}\left[\textstyle\sum_{i \geq 1} \varepsilon^i \gamma_i(s)\right] \equiv \textstyle\sum_{j \geq 1} \varepsilon^j \eta_j(s),$$

où les $\eta_j(s)$ sont des polynômes en s à coefficients dans $\mathbb{R}[\Delta]$. Les premiers termes sont :

$$\text{(23)} \qquad \begin{cases} \eta_1(s) = \Pi_1'(s) = -R_{20}, \\ \eta_2(s) = \Pi_2'(s) + \gamma_1(s)\,\Pi_1'(s) = -R_{21} - R_{20}\,\gamma_1(s). \end{cases}$$

Comme $c > 0$, les intégrales :

$$\text{(24)} \qquad \mu_l = \int_0^{+\infty} ds\, e^{-cs}\, \eta_l(s),$$

convergent donc et les μ_l sont dans $\mathbb{R}[\Delta]$; de (21), on tire le développement *formel* :

$$\mathscr{I} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} e^{Y_0} \left(\sum\nolimits_{l \geq 1} \varepsilon^l \mu_l\right), \tag{25}$$

et finalement (5), (9) donnent formellement :

$$q(\varepsilon) \simeq E(1_{Z_{n+1}>0} X_N) = E(\mathscr{I}) = \sum\nolimits_{l \geq 1} q_l \varepsilon^l, \tag{26}$$

où les nombres q_l se calculent par :

$$q_l = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} E(\mu_l e^{Y_0}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} e^{-(\mu^2/2\rho)} E[\mu_l e^{Q_0}]. \tag{27}$$

On verra plus loin que $\mu_l e^{Q_0}$ est bien dans $L_1(\Omega)$. Les premiers termes valent :

$$\mu_1 = -\frac{1}{c} R_{10},$$

$$\mu_2 = -\frac{1}{c}\left[R_{21} + R_{20}\left(Q_1 + \frac{\mu}{\rho}\right) + c R_{20} R_{30} - R_{20} J_{30} - R_{20}^2 \left(Q_1 + \frac{\mu}{\rho}\right)\right], \tag{28}$$

d'où en particulier :

$$q_1 = -\frac{1}{c\sqrt{2\pi\rho}} e^{-(\mu^2/2\rho)} E[R_{20} e^{Q_0}]. \tag{29}$$

D'après la proposition 9.3, le développement asymptotique rigoureux de $P(x_{0,T}^{\varepsilon} \in A)$ « devrait » donc s'écrire dans ce cas :

$$P(x_{0,T}^{\varepsilon} \in A) = \exp\left(-\frac{\Lambda_0}{\varepsilon^2} + \frac{\Lambda_1}{\varepsilon} + \Lambda_2\right)\left[\sum\nolimits_{1 \leq l \leq L} q_l \varepsilon^l + o(\varepsilon^M)\right], \tag{30}$$

avec $L < M < L+1$ convenables, où les Λ_i sont calculés en 7.7 et les q_l en (27). C'est ce que nous prouverons au paragraphe 12.

11.3. LE CAS OÙ $\Lambda(A) = 0$

On a alors $c = 0$ et $f \equiv \varphi$. Ici (2) devient :

$$J = J(\varepsilon, Y) = -\sum\nolimits_{1 \leq j \leq N} J_{j+2,\,l} \varepsilon^j Y^l, \tag{31}$$

ce qui donne par substitution :

$$\exp J(\varepsilon, y) = \sum_{l \geq 0} \frac{1}{l\,!} J(\varepsilon, y)^l = \sum_{j \geq 0} I_j(y), \tag{32}$$

où les $I_j(y)$ sont des polynômes en y à coefficients dans $\mathbb{R}[\Delta]$. En particulier :

$$I_0 = 1; \qquad I_1(y) = -\sum_{0 \leq l \leq 3} J_{3l} y^l; \qquad I_1(Y) = -J_3.$$

On verra au paragraphe 12 que $F(\varepsilon, y)$ est croissante en y sur un « grand » intervalle de $\mathbb{R}$ et donc que *formellement* $\{F(\varepsilon, y) > 0\}$ est « équivalent » à $\{y > \Phi(\varepsilon, 0)\}$.

Puisque :

$$M(\varepsilon, y) - \frac{(y-\mu)^2}{2\rho} = \Pi(y) - \frac{(y-\mu)^2}{2\rho} + J(\varepsilon, y) = \tau(y) + J(\varepsilon, y), \tag{33}$$

on peut écrire *formellement* l'intégrale $\mathscr{I}$ de (9) sous la forme :

$$\mathscr{I} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \int_{\Phi(\varepsilon,\, 0)}^{+\infty} \exp[\tau(y) + J(\varepsilon, y)]\, dy \tag{34}$$

$$= \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j \int_{\Phi(\varepsilon,\, 0)}^{+\infty} I_j(y) \exp \tau(y)\, dy.$$

Posons pour $s \in \mathbb{R}$, $j \geq 0$:

$$F_j(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \int_s^{+\infty} I_j(y) \exp \tau(y)\, dy = E[1_{Y \geq s} I_j(Y) e^{\Pi(Y)} \mid \Delta], \tag{35}$$

$$F_{ji}(s) = \frac{1}{i\,!} \frac{\partial^i F_j(s)}{\partial s^i} \qquad \text{et} \qquad f_{ji} = F_{ji}(0).$$

Ceci donne :

$$F_{ji}(s) = \Pi_{ji}(s) \exp \tau(s) \qquad \text{pour} \quad i \geq 1, \quad j \geq 0, \tag{36}$$

où $\Pi_{ji}(s)$ est un polynôme (à coefficients entiers) en :

$$\left\{ \tau'(s);\ \tau''(s);\ \frac{\partial^l I_j(s)}{\partial s^l},\ 0 \leq l \leq i-1 \right\}.$$

Ainsi, $\Pi_{ji}(s)$ est un polynôme en s à coefficients dans $\mathbb{R}[\Delta]$, et, puisque $\tau(0)=\gamma_0$:

$$f_{ji}=F_{ji}(0)=e^{\gamma_0}\,\Pi_{ji}(0) \qquad \text{pour} \quad i\geqslant 1, \quad j\geqslant 0, \tag{37}$$

où $\Pi_{ji}(0)\in\mathbb{R}[\Delta]$ s'explicite facilement. Par exemple :

$$\begin{aligned} &\Pi_{0i}(0)=0 \qquad \text{pour} \quad i\geqslant 1,\\ &\Pi_{11}(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\,J_{30}. \end{aligned} \tag{38}$$

Formellement, $F_j(s)$ et $\Phi(\varepsilon, 0)$ se développent par leurs séries de Taylor (*cf.* (11)) :

$$\begin{cases} F_j(s)=\sum_{i\geqslant 0} f_{ji}\,s^i,\\ \Phi(\varepsilon, 0)=\sum_{l\geqslant 1}\Phi_{l0}\,\varepsilon^l \end{cases} \tag{39}$$

et (34), (35) donnent :

$$\mathscr{I}=\sum_{j\geqslant 0}\varepsilon^j F_j[\Phi(\varepsilon, 0)], \tag{40}$$

d'où, d'après (39), le développement *formel* :

$$\mathscr{I}=\sum_{j\geqslant 0}\varepsilon^j\sum_{i\geqslant 0}\Big(\sum_{l\geqslant 1}\varepsilon^l\,\Phi_{l0}\Big)^i f_{ji}=\sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k v_k, \tag{41}$$

où les v_k sont des combinaisons linéaires finies des f_{ji} à coefficients dans $\mathbb{R}[\Delta]$.

On a par exemple :

$$v_0=f_{00}; \qquad v_1=f_{10}; \qquad v_2=f_{20}-R_{20}\,f_{11}. \tag{42}$$

On verra au paragraphe 12 que les v_k sont dans $L_1(\Omega)$, d'où d'après (5), (9), (42), le développement formel :

$$q(\varepsilon)=\sum_{j\geqslant 0}\chi_j\,\varepsilon^j \qquad \text{avec} \quad \chi_j=E(v_j). \tag{43}$$

Comme $\Lambda(A)=0$, on a (*cf.* 9.4), $\Lambda_0=\Lambda_1=\Lambda_2=0$ et $\mathscr{L}=0$, d'où :

$$\Pi(Y)=-Q\,g_1^2 \tag{44}$$

et donc

(45)

On en

(46)

D'apr

s'écrire

convena

(47)

12. Ju

Conse

petit. N

$c_5 c_6 \ldots$

12.1.

(1)

et notons

(2)

Alors, il

est réalis

(3)

admette

l'intervall

est monot

(4)

et donc d'après (35) :

(45) $$E(F_{j0}) = E[1_{Y>0}\, I_j(Y)\, e^{-Q_\theta T_1^2}].$$

On en tire l'expression des premiers coefficients χ_j :

(46) $$\begin{cases} \chi_0 = E[1_{Y>0}\, e^{-Q_\theta T_1^2}], \\ \chi_1 = E[1_{Y>0}\, J_3\, e^{-Q_\theta T_1^2}]. \end{cases}$$

D'après 9.4, le développement rigoureux de $P(x^\varepsilon_{0,\,T} \in A)$ « devrait » s'écrire dans ce cas, pour un entier L et un nombre $M \in]L, L+1[$ convenables :

(47) $$P(x^\varepsilon_{0,\,T} \in A) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant L} \chi_j \varepsilon^j + o(\varepsilon^M).$$

12. Justification rigoureuse des calculs formels du paragraphe 11

Conservons toutes les notations du paragraphe 11 et fixons $\gamma > 0$ assez petit. Nous introduirons successivement des *constantes positives strictes* $c_5\, c_6 \ldots$, etc. *qui ne dépendront que de* γ.

12.1. Lemme. — *Considérons l'événement :*

(1) $$DR = \{ |R_{ji}| \leqslant \varepsilon^{-\gamma} \text{ pour } 0 \leqslant i \leqslant j,\ 2 \leqslant j \leqslant n+2 \} \subset \Omega$$

et notons :

(2) $$F(\varepsilon, y) = y + \sum_{0 \leqslant i \leqslant j+1} \sum_{1 \leqslant j \leqslant n+1} R_{j+1,\,i}\, y^i \varepsilon^j.$$

Alors, il existe $c_5 > 0$, $\varepsilon_1 > 0$ tels que lorsque $\varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ et quand l'événement DR est réalisé, l'équation en y :

(3) $$F(\varepsilon, y) = u,$$

admette pour chaque $u \in [0, 1/2\,\varepsilon^{-\gamma}]$ une unique solution $y = \Phi(\varepsilon, u)$ dans l'intervalle $[-\varepsilon^{-\gamma}, \varepsilon^{-\gamma}]$; de plus, pour $0 \leqslant u \leqslant 1/2\,\varepsilon^{-\gamma}$, la fonction $u \to \Phi(\varepsilon, u)$ est monotone, de classe C^∞, et vérifie :

(4) $$\begin{cases} |\Phi(\varepsilon, u)| \leqslant \varepsilon^{-\gamma} & \text{pour } 0 \leqslant u \leqslant 1/2\,\varepsilon^{-\gamma}, \\ |\Phi(\varepsilon, u)| \leqslant 6\,\varepsilon^{1-\gamma} & \text{pour } 0 \leqslant u \leqslant \varepsilon^{1-\gamma}, \end{cases}$$

$$(5)\qquad \frac{1}{2} \leqslant \frac{\partial \Phi}{\partial u}(\varepsilon, u) \leqslant 2 \qquad \textit{pour} \quad 0 \leqslant u \leqslant 1/2\,\varepsilon^{-\gamma},$$

$$(6)\qquad \left|\frac{\partial^{i+j}\Phi}{\partial \varepsilon^i\, \partial u^j}(\varepsilon, u)\right| \leqslant \varepsilon^{-\gamma c_5} \qquad \textit{pour} \quad 0 \leqslant i, j \leqslant N+1, \quad 0 \leqslant u \leqslant 1/2\,\varepsilon^{-\gamma}.$$

Preuve. — Imposons $\gamma < 1/3$. Alors, pour ε assez petit, (1) et (2) forcent :

$$(7)\qquad \frac{1}{2} \leqslant \frac{\partial F}{\partial y}(\varepsilon, y) \leqslant 2 \qquad \text{pour} \quad |y| \leqslant \varepsilon^{-\gamma},$$

$$(8)\qquad \begin{cases} -2\,\varepsilon^{-\gamma} \leqslant F(\varepsilon, -\varepsilon^{-\gamma}) \leqslant -\dfrac{1}{2}\varepsilon^{-\gamma}, \\[2mm] \dfrac{1}{2}\varepsilon^{-\gamma} \leqslant F(\varepsilon, \varepsilon^{-\gamma}) \leqslant 2\,\varepsilon^{-\gamma}. \end{cases}$$

Ainsi, $F(\varepsilon, .)$ est monotone sur $[-\varepsilon^{-\gamma}, \varepsilon^{-\gamma}]$, ce qui, avec (7) et (8), démontre l'existence et l'unicité de Φ telle que :

$$(9)\qquad F(\varepsilon, \Phi(\varepsilon, u)) \equiv u \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant u \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon^{-\gamma}.$$

Le théorème des fonctions implicites garantit que Φ est C^∞.

D'après (2), on a, pour ε assez petit, $|F(\varepsilon, 0)| \leqslant 2\,\varepsilon^{1-\gamma}$, et donc, grâce à (7) :

$$-2\,\varepsilon^{1-\gamma} + \frac{1}{2}y \leqslant F(\varepsilon, y) \leqslant 2\,\varepsilon^{1-\gamma} + 2y \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant y \leqslant \varepsilon^{-\gamma},$$

$$-2\,\varepsilon^{1-\gamma} + 2y \leqslant F(\varepsilon, y) \leqslant 2\,\varepsilon^{1-\gamma} + \frac{1}{2}y \qquad \text{pour} \quad -\varepsilon^{-\gamma} \leqslant y \leqslant 0.$$

On en tire les inégalités :

$$(10)\qquad -4\,\varepsilon^{1-\gamma} \leqslant \Phi(\varepsilon, 0) \leqslant \Phi(\varepsilon, \varepsilon^{1-\gamma}) \leqslant 6\,\varepsilon^{1-\gamma}.$$

La définition de F prouve l'existence de $c_6 > 0$ tel que, pour ε assez petit, on ait :

$$(11)\qquad \left|\frac{\partial^{i+l} F}{\partial \varepsilon^i\, \partial y^l}(\varepsilon, y)\right| \leqslant \varepsilon^{-\gamma c_6} \qquad \text{pour} \quad |y| \leqslant \varepsilon^{-\gamma}, \quad i \geqslant 0, \quad l \geqslant 0.$$

Posons :

Par déri

(12) { $F^{(}$

où les
{ Φ^{pq} | $p+q$
entraînent

12.2. C
$DY = \{|Y|$

dès que $0 \leqslant$

Preuve.
indépendan
par les R_{ji} :

$\frac{1}{\sqrt{2}}$

où les R_{ji}
changemen

$\int_{\mathbb{R}} 1$

expression c

12.3. Le
rons les évé

Posons :

$$\Phi^{il}=\frac{\partial^{i+l}\Phi}{\partial\varepsilon^i\,\partial u^l}(\varepsilon,\,u);\qquad F^{il}=\frac{\partial^{i+l}F}{\partial\varepsilon^i\,\partial y^l}[\varepsilon,\,\Phi(\varepsilon,\,u)].$$

Par dérivations successives, (7) entraîne :

$$(12)\quad \begin{cases} F^{01}\Phi^{01}=1; \qquad F^{01}\Phi^{10}+F^{10}=0, \\ F^{01}\Phi^{il}+\sum_{m+j\leqslant i+l,\,(m,\,j)\neq(0,\,1)}F^{mj}P_{mjil}=0 \qquad \text{pour} \quad i+l\geqslant 2, \end{cases}$$

où les P_{mjil} sont des polynômes (à coefficients entiers) en $\{\Phi^{pq}\,|\,p+q<i+l\}$. Les relations (10), (11), (12) et le fait que $|F^{01}|\geqslant 1/2$ entraînent alors (4), (5), (6) par récurrence.

12.2. Corollaire. — *Soit $Z_{n+1}=F(\varepsilon,\,Y)$. Considérons l'événement $DY=\{|Y|\leqslant\varepsilon^{-\gamma}\}$. Alors, pour ε petit, on a :*

$$P[(|Z_{n+1}|\leqslant s)\cap DR\cap DY]\leqslant\frac{2s}{\sqrt{2\pi\rho}}$$

dès que $0\leqslant s\leqslant 1/2\,\varepsilon^{-\gamma}$.

Preuve. — La v.a. gaussienne Y de variance ρ et moyenne μ est *indépendante* des R_{ji}. La probabilité cherchée s'écrit donc, en conditionnant par les R_{ji} :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}E\left\{1_{DR}\int_{\mathbb{R}}1_{|y|\leqslant\varepsilon^{-\gamma}}1_{|F(\varepsilon,\,y)|\leqslant s}\exp\left[-\frac{(y-\mu)^2}{2\rho}\right]dy\right\},$$

où les R_{ji} restent fixés dans l'intégrale. D'après 12.1, on peut faire le changement de variable $y=\Phi(\varepsilon,\,u)$ et l'intégrale devient :

$$\int_{\mathbb{R}}1_{|\Phi(\varepsilon,\,u)|\leqslant\varepsilon^{-\gamma}}1_{|u|\leqslant s}\exp\left[-\frac{(\Phi(\varepsilon,\,u)-\mu)^2}{2\rho}\right]\frac{\partial\Phi}{\partial u}(\varepsilon,\,u)\,du,$$

expression qui se majore trivialement grâce à (5) par $\int 1_{|u|\leqslant s}\times 2\,du=2s$.

12.3. Lemme. — *Soit Δ le vecteur aléatoire défini en 11.(7) et considérons les événements :*

$$DY=\{|Y|\leqslant\varepsilon^{-\gamma}\};\qquad DW=\{|\Delta|\leqslant\varepsilon^{-\gamma}\},$$
$$D\hat{W}=\{|\hat{r}_{n+3}|\leqslant\varepsilon^{-\gamma};\ |\hat{J}_{N+3}|\leqslant\varepsilon^{-\gamma}\},$$
$$D=DY\cap DW\cap D\hat{W}.$$

Alors, on a :

$$q(\varepsilon) = E[1_{Z>0}\, 1_V(z^\varepsilon)\, X] = E[1_{Z_{n+1}>0}\, 1_D\, 1_V(z^\varepsilon)\, X] + o(\varepsilon^M),$$

pour tout réel M tel que $M<(n+2)\eta$, avec $\eta=\eta(A)$ donné par 9.(10).

Preuve. — Si ε et le rayon r de V sont assez petits, il existe $c_7>0$ tel que :

(13) Les probabilités des événements $(DY)^c$, $(DW)^c$, $(D\hat{W})^c \cap (z^\varepsilon \in V)$, $D^c \cap (z^\varepsilon \in V)$ sont toutes majorées par $\exp(-\varepsilon^{-\gamma c_7})$.

En effet, pour DY, DW, l'assertion résulte du fait que $Y \in \mathscr{W}$ et $\Delta \in \mathscr{W}$ (*cf.* § 5). Pour $(D\hat{W})^c \cap (z^\varepsilon \in V)$, on montre comme dans ([2], § 7) que $\|\hat{g}_{n+3}\|_\infty$, $\|\hat{g}_{N+3}\|_\infty$ et par suite $\hat{r}_{n+3}$, $\hat{J}_{N+3}$ qui sont essentiellement polynomiales en $\{g_1, \ldots, g_{n+2}, \hat{g}_{n+3}\}$, appartiennent à l'espace des v. a. Γ telles qu'il existe $c_8>0$ vérifiant :

$$P\{|\Gamma| \geqslant s;\ z^\varepsilon \in V\} \leqslant \exp(-s^{c_8}),$$

pour tout $s \geqslant 1/c_8$ et tout $\varepsilon \leqslant c_8$.

Comme $\|1_{Z>0}\, 1_V(z^\varepsilon)\, X\|_\alpha$ reste borné quand $\varepsilon \to 0$, pour α fixé dans $]1, 1/1-\eta[$, l'inégalité de Hölder et (13) fournissent $c_9>0$ tel que :

$$E[1_{Z>0}\, 1_V(z^\varepsilon)\, X] = E[1_D\, 1_{Z>0}\, 1_V(z^\varepsilon)\, X] + 0[\exp(-\varepsilon^{-\gamma c_9})].$$

D'où, pour tout $M \geqslant 0$:

$$(14) \qquad q(\varepsilon) = E[1_D\, 1_{Z>0}\, 1_V(z^\varepsilon)\, X] + o(\varepsilon^M).$$

La relation $Z = Z_{n+1} + \varepsilon^{n+2}\, \hat{r}_{n+3}$ force :

$$|1_{Z>0} - 1_{Z_{n+1}>0}| \leqslant 1_{|Z_{n+1}| \leqslant \varepsilon^{n+2} |\hat{r}_{n+3}|},$$

et donc l'inégalité :

$$(15) \qquad |1_D\, 1_{Z>0} - 1_D\, 1_{Z_{n+1}>0}| \leqslant 1_D\, 1_{|Z_{n+1}| \leqslant \varepsilon^{n+2-\gamma}} \leqslant 1_D\, 1_{|Z| \leqslant 2\varepsilon^{n+2-\gamma}}.$$

De (14), (15), on tire, quel que soit $M \leqslant 0$:

$$(16) \qquad |q(\varepsilon) - E[1_D\, 1_{Z_{n+1}>0}\, 1_V(z^\varepsilon)\, X]| \leqslant o(\varepsilon^M) + E[1_D\, 1_{|Z_{n+1}| \leqslant \varepsilon^{n+2-\gamma}}\, 1_{|Z| \leqslant 2\varepsilon^{n+2-\gamma}}\, 1_V(z^\varepsilon)\, X].$$

La v. a. $1_{|Z| \leqslant 2\varepsilon^{n+2-\gamma}} 1_V(z^\varepsilon) X$ s'écrit, avec les notations 9.(13),

$$1_{|Z| \leqslant 2\varepsilon^{n+2-\gamma}} e^{-c(Z/\varepsilon)} 1_V(z^\varepsilon) X_2 X_3.$$

Donc (*cf.* 9.(15), 9.(19)), pour tout $\alpha < 1/1-\eta$, cette v. a. reste bornée dans $L_\alpha(\Omega)$ quand $\varepsilon \to 0$. Au second membre de (16), on peut alors majorer (Hölder) le terme $E[\ldots]$ par :

$$c_{10}\{P[D \cap (|Z_{n+1}| \leqslant \varepsilon^{n+2-\gamma})]\}^{1-1/\alpha},$$

et donc, grâce à 12.2, par $c_{11}\,\varepsilon^{(n+2-\gamma)(1-1/\alpha)}$. Or, pour tout $M < (n+2)\eta$, on peut garantir $(n+2-\gamma)(1-1/\alpha) > M$ à condition de fixer γ assez petit, et $\alpha < 1/1-\eta$ assez proche de $1/1-\eta$. Ceci achève la preuve du lemme.

12.4. Lemme. — *Pour tout entier M tel que $M < N+1$ et $M < (n+2)\eta$, on a, si $\Lambda(A) > 0$:*

$$q(\varepsilon) = E[1_{DY} 1_{DW} 1_{(\varepsilon^{1-\gamma} \geqslant Z_{n+1} \geqslant 0)} X_N] + o(\varepsilon^M);$$

et si $\Lambda(A) = 0$:

$$q(\varepsilon) = E[1_{DY} 1_{DW} 1_{Z_{n+1} \geqslant 0} X_N] + o(\varepsilon^M).$$

Preuve. — Soit $M < (N+1) \wedge (n+2)\eta$. On a $X = X_N \exp(-\varepsilon^{N+1} \bar{J}_{N+3})$, d'où, grâce à la définition de D,

$$1_D X = 1_D X_N \exp O(\varepsilon^{N+1-\gamma}) = [1 + o(\varepsilon^M)]\, 1_D X_N$$

pourvu que γ soit assez petit; de 12.3, on déduit alors :

$$q(\varepsilon) = E[1_{Z_{n+1} > 0} 1_D 1_V(z^\varepsilon) X_N] + o(\varepsilon^M). \tag{17}$$

Par 11.(6) et 11.(8), on a :

$$X_N = \exp\left[-\frac{c}{\varepsilon} Z_{n+1} + \Pi(Y) + J(\varepsilon, Y)\right]$$

et l'événement $DY \cap DW$ implique $J(\varepsilon, Y) = O(\varepsilon^{1-3\gamma})$. Par suite, la v. a. $1_{Z_{n+1} > 0} 1_{DY \cap DW} X_N$ est majorée par $2 \exp \Pi(Y) = 2 X_2$ pour ε petit et reste donc (*cf.* 9.(19)) bornée dans chaque $L_\alpha(\Omega)$, $1 \leqslant \alpha < 1/1-\eta$, quand $\varepsilon \to 0$.

De plus :

$$P[(DY \cap DW) - D \cap (z^\varepsilon \in V)] \leqslant P(z^\varepsilon \notin V) + P[(z^\varepsilon \in V) \cap D^c]$$
$$\leqslant \exp(-c_{12}\,\varepsilon^{-2}) + \exp(-\varepsilon^{-\gamma c_7}) \leqslant \exp(-\varepsilon^{-\gamma c_{13}}),$$

pour ε petit et $c_{13}>0$ constant. L'inégalité de Hölder fournit alors $c_{14}>0$ tel que :

(18) $$E[1_{Z_{n+1}>0}\,1_D\,1_V(z^\varepsilon)\,X_N] = E[1_{Z_{n+1}>0}\,1_{DY\cap DW}\,X_N] + O[\exp-\varepsilon^{-\gamma c_{14}}].$$

Sur $(Z_{n+1}>\varepsilon^{1-\gamma})$ on majore $1_{DY\cap DW}X_N$ par $2\exp(-c^{-\gamma})\exp\Pi(Y)$, d'où :

(19) $$E(1_{Z_{n+1}>\varepsilon^{1-\gamma}}\,1_{DY\cap DW}\,X_N)\leqslant c_{15}\exp(-c\,\varepsilon^{-\gamma}).$$

On sait que $\Lambda(A)>0$ force $c>0$, et dans ce cas (17), (18) et (19) achèvent de prouver 12.4. Quand $\Lambda(A)=0$, on a $c=0$, mais (17) et (18) prouvent déjà 12.4 dans ce cas.

12.5. Le cas $\Lambda(A)>0$

On a alors $c>0$. Soit L l'entier tel que $L<(N+1)\wedge(n+2)\eta\leqslant L+1$, et fixons M tel que $L<M<(N+1)\wedge(n+2)\eta$. De 12.4, on tire :

(20) $$q(\varepsilon)=o(\varepsilon^M)+E[1_{DW}\,E[1_{|Y|\leqslant\varepsilon^{-\gamma}}\,1_{(\varepsilon^{1-\gamma}\geqslant F(\varepsilon,Y)\geqslant 0)}\exp M(\varepsilon,\ Y)\,|\,\Delta]]$$

et l'expérance conditionnelle s'écrit :

(21) $$\int_{\mathbb{R}} 1_{|y|\leqslant\varepsilon^{-\gamma}}\,1_{(\varepsilon^{1-\gamma}\geqslant F(\varepsilon,y)\geqslant 0)}[\exp M(\varepsilon,\ y)] \times\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\exp-\frac{(y-\mu)^2}{2\rho}\right]dy.$$

Le changement de variable (légitime d'après 12.1) $y=\Phi(\varepsilon,\ \varepsilon t)$, où $0\leqslant t\leqslant\varepsilon^{-\gamma}$, transforme l'intégrale (21) en (22) à l'aide de (4) et 11.(16) :

(22) $$\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\int_0^{\varepsilon^{-\gamma}}\exp[-cs+\tau(\Phi(\varepsilon,\ \varepsilon s))+J(\varepsilon,\ \Phi(\varepsilon,\ \varepsilon s))]\frac{\partial\Phi}{\partial s}(\varepsilon,\ \varepsilon s)\,ds.$$

Posons $\gamma_0=\tau(0)=Q_0-(\mu^2/2\rho)$ et :

(23) $$\tau[\Phi(\varepsilon,\ \varepsilon s)]+J[\varepsilon,\ \Phi(\varepsilon,\ \varepsilon s)]=\gamma_0+S.$$

Sur l'ens
d'après (4),
(24)
La formu
Au vu de
on en dédui
(25)
avec la majo
(26)
Avec les
usuels sont :
(27)
où les restes
$\delta\in[0,\ 1]$ conv
et une expres
que :
(28) $|\tilde{\Phi}$

Sur l'ensemble DW et pour $0 \leqslant s \leqslant \varepsilon^{-\gamma}$, on a $|\Phi(\varepsilon, \varepsilon s)| \leqslant 6\varepsilon^{1-\gamma}$ d'après (4), d'où, grâce à 11.(6) et 11.(16), la majoration élémentaire :

(24) $$|S| \leqslant c_{16}\, \varepsilon^{1-2\gamma}.$$

La formule de Taylor usuelle donne pour un certain $\delta \in [0, 1]$:

$$\exp S = \sum_{0 \leqslant p \leqslant L} \frac{1}{p\,!} S^p + \frac{S^{L+1}}{(L+1)\,!} \exp \delta S.$$

Au vu de l'inégalité suivante, tirée de (24),

$$\left| \frac{S^{L+1}}{(L+1)\,!} \exp \delta S \right| \leqslant c_{17}\, \varepsilon^{(L+1)(1-2\gamma)},$$

on en déduit :

(25) $$\exp S = \sum_{0 \leqslant p \leqslant L} \frac{S^p}{p\,!} + \varepsilon^{L+1} \hat{S}_{L+1},$$

avec la majoration suivante, vraie sur DW et pour $0 \leqslant s \leqslant \varepsilon^{-\gamma}$,

(26) $$|\hat{S}_{L+1}| \leqslant c_{17}\, \varepsilon^{-2\gamma(L+1)}.$$

Avec les notations 11.(13) et 11.(14), les développements de Taylor usuels sont :

(27) $$\begin{aligned} \Phi(\varepsilon, \varepsilon s) &= \sum_{1 \leqslant l \leqslant L} \varepsilon^l \Pi_l(s) + \varepsilon^{L+1} \hat{\Phi}_{L+1}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial s}(\varepsilon, \varepsilon s) &= \sum_{1 \leqslant l \leqslant L} \varepsilon^l \Pi_l'(s) + \varepsilon^{L+1} \partial \hat{\Phi}_{L+1}, \end{aligned}$$

où les restes $\hat{\Phi}_{L+1}$, $\partial \hat{\Phi}_{L+1}$ se majorent comme suit; on écrit, pour un $\delta \in [0, 1]$ convenable :

$$\hat{\Phi}_{L+1} = \sum_{i+j=L+1} \frac{1}{i\,!\,j\,!} s^j \Phi^{ij}(\delta\varepsilon, \delta\varepsilon s)$$

et une expression analogue pour $\partial \hat{\Phi}_{L+1}$, ce qui par (6) donne $c_{18} > 0$ tel que :

(28) $$|\hat{\Phi}_{L+1}| + |\partial \hat{\Phi}_{L+1}| \leqslant \varepsilon^{-\gamma c_{18}}, \quad \text{sur } DW \text{ et } 0 \leqslant s \leqslant \varepsilon^{-\gamma}.$$

Puisque $\tau(y)$ et $J(\varepsilon, y)$ sont des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}[\Delta]$, (23) et (28) donnent directement, avec les notations 11.(17) :

$$\gamma_0 + S = \sum_{0 \leqslant l \leqslant L} \varepsilon^l \gamma_l(s) + \varepsilon^{L+1} \hat{\gamma}_{L+1}, \tag{29}$$

où $\hat{\gamma}_{L+1}$ est un polynôme en ε, s, $\hat{\Phi}_{L+1}$ à coefficients dans $\mathbb{R}[\Delta]$.

Par suite, le calcul formel 11.(22) est remplacé par le développement précis :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s}(\varepsilon, \varepsilon s) \exp(\gamma_0 + S) = e^{\gamma_0} [\sum_{1 \leqslant l \leqslant L} \varepsilon^l \Pi'_l(s) + \varepsilon^{L+1} \partial \hat{\Phi}_{L+1}] [\sum_{0 \leqslant p \leqslant L} \frac{S^p}{p!} + \varepsilon^{L+1} \hat{S}_{L+1}],$$

où l'on substitue :

$$S = \sum_{1 \leqslant l \leqslant L} \varepsilon^l \gamma_l(s) + \varepsilon^{L+1} \hat{\gamma}_{L+1},$$

d'après (29). D'où le développement (notations 11.(22)) :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s}(\varepsilon, \varepsilon s) \exp(\gamma_0 + S) = e^{\gamma_0} [\sum_{1 \leqslant l \leqslant L} \varepsilon^l \eta_l(s) + \varepsilon^{L+1} \hat{\eta}_{L+1}], \tag{30}$$

où $\hat{\eta}_{L+1}$ est un polynôme en ε, s, $\partial \hat{\Phi}_{L+1}$, $\hat{S}_{L+1}$, $\hat{\gamma}_{L+1}$ à coefficients dans $\mathbb{R}[\Delta]$ et donc *a fortiori* un polynôme en ε, s, $\partial \hat{\Phi}_{L+1}$, $\hat{S}_{L+1}$, $\hat{\Phi}_{L+1}$ à coefficients dans $\mathbb{R}[\Delta]$.

Sur DW et $0 \leqslant s \leqslant \varepsilon^{-\gamma}$, on en déduit par (28) et (26) la majoration :

$$|\hat{\eta}_{L+1}| \leqslant \varepsilon^{-\gamma c_{19}} \quad \text{avec} \quad c_{19} > 0 \text{ constant.} \tag{31}$$

L'intégrale (22) peut alors s'écrire :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} e^{\gamma_0} (\sum_{l \geqslant 1} \varepsilon^l \bar{\mu}_l + \varepsilon^{L+1} \hat{\mu}_{L+1}), \tag{32}$$

avec :

$$\bar{\mu}_l = \int_0^{\varepsilon^{-\gamma}} ds\, e^{-cs} \eta_l(s), \qquad \hat{\mu}_{L+1} = \int_0^{\varepsilon^{-\gamma}} ds\, e^{-cs} \hat{\eta}_{L+1}.$$

Notons, con

et soit Θ la so
$1 \leqslant l \leqslant L$. Il exi

(33) $|\mu_l - \bar{\mu}_l|$

tandis que (31

(34)

De (32), (3
petit :

(35)

avec :

(36)

Revenant à

(37) $q(\varepsilon) = o$

Nous verro
Comme μ_l est
a $\mu_l \in \mathscr{W}$, et
$q_l = (1/\sqrt{2\pi\rho})$.
$c_{23} > 0$ tel que

(38) $|q_l -$

Notons, comme en 11. (24), $\mu_l = \int_0^{+\infty} ds\, e^{-cs} \eta_l(s)$ de sorte que $\mu_l \in \mathbb{R}[\Delta]$, et soit Θ la somme des modules des coefficients des polynômes $\eta_l(s)$ pour $1 \leqslant l \leqslant L$. Il existe $c_{20} > 0$ tel que pour $1 \leqslant l \leqslant L$:

$$(33) \quad |\mu_l - \bar{\mu}_l| = \left| \int_{\varepsilon^{-\gamma}}^{+\infty} ds\, e^{-cs} \eta_l(s) \right|$$

$$\leqslant e^{-(c/2\, \varepsilon^{\gamma})} \int_0^{+\infty} ds\, e^{-(cs/2)} |\eta_l(s)| \leqslant c_{20}\, \Theta\, e^{-(c/2)\, \varepsilon^{-\gamma}},$$

tandis que (31) implique :

$$(34) \qquad |\hat{\mu}_{L+1}| \leqslant \frac{1}{c} \varepsilon^{-\gamma c_{19}}.$$

De (32), (33) et (34), on déduit que l'intégrale (22) s'écrit, pour ε assez petit :

$$(35) \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} e^{Y_0} \left(\textstyle\sum_{1 \leqslant l \leqslant L} \varepsilon^l \mu_l + \varepsilon^{L+1} \hat{u}_{L+1} \right),$$

avec :

$$(36) \qquad |\hat{u}_{L+1}| \leqslant c_{22}\, \varepsilon^{-\gamma c_{19}} + c_{21}\, \Theta.$$

Revenant à (20), on obtient :

$$(37) \quad q(\varepsilon) = o(\varepsilon^M) + \textstyle\sum_{1 \leqslant l \leqslant L} \dfrac{\varepsilon^l}{\sqrt{2\pi\rho}} E(1_{DW}\, e^{Y_0} \mu_l)$$

$$+ \frac{\varepsilon^{L+1}}{\sqrt{2\pi\rho}} E(e^{Y_0} \hat{u}_{L+1}\, 1_{DW}).$$

Nous verrons ci-dessous que e^{Y_0} est dans $L_\alpha(\Omega)$ pour $1 \leqslant \alpha \leqslant 1/1-\eta$. Comme μ_l est dans $\mathbb{R}[\Delta]$, et que le vecteur aléatoire Δ appartient à $\mathscr{W}$, on a $\mu_l \in \mathscr{W}$, et μ_l admet donc des moments de tous ordres; donc $q_l = (1/\sqrt{2\pi\rho})\, E(e^{Y_0} \mu_l)$ est *fini*; l'inégalité de Hölder et (13) fournissent $c_{23} > 0$ tel que :

$$(38) \qquad \left| q_l - \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} E(1_{DW}\, e^{Y_0} \mu_l) \right| \leqslant e^{-\gamma c_{23}} \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant l \leqslant L.$$

D'autre part, par (36), on a :

$$(39)\quad \left|E\left(1_{DW}\, e^{\gamma_0}\, \hat{u}_{L+1}\right)\right| \leqslant c_{22}\, \varepsilon^{-\gamma c_{20}}\, E\left(e^{\gamma_0}\right) + c_{21}\, E\left(e^{\gamma_0}\,\Theta\right) \leqslant c_{24}\, \varepsilon^{-\gamma c_{20}},$$

car Θ est par définition majoré par un polynôme en Δ, donc appartient à $\mathscr{W}$, de sorte que $e^{\gamma_0}\Theta$ est dans $L_1(\Omega)$.

De (37), (38) et (39), on conclut :

$$q(\varepsilon) = o(\varepsilon^M) + \sum_{1 \leqslant l \leqslant L} \varepsilon^l q_l + o(\varepsilon^{L+1-\gamma c_{20}}).$$

Comme c_{20} *ne dépend pas de* γ (*cf.* supra), il suffit de prendre γ assez petit pour avoir $L+1-\gamma c_{20} > M$ et de conclure que :

$$(40)\quad q(\varepsilon) = \sum_{1 \leqslant l \leqslant L} \varepsilon^l q_l + o(\varepsilon^M).$$

Reste à prouver l'assertion suivante qui a servi plus haut :

12.6. Lemme. — *La v. a.* e^{γ_0} *admet des moments d'ordre* α *finis pour* $1 \leqslant \alpha \leqslant 1/1-\eta$, *où* $\eta = \eta(A)$.

Preuve. — En effet, pour un tel α, on a $\|X_2\|_\alpha$ fini d'après 9.(19). Comme $X_2 = \exp \Pi(Y)$, ceci s'écrit $E(\exp \alpha \Pi(Y)) < +\infty$, et donc après conditionnement par Δ :

$$E\left\{\int_{\mathbb{R}} dy \exp\left[\alpha \Pi(y) - \frac{(y-\mu)^2}{2\rho}\right]\right\} < +\infty,$$

ou encore d'après 11.(6) :

$$\mathscr{E} = E\left[(\exp \alpha Q_0)\int_{\mathbb{R}} dy \exp\left[\left(\alpha Q_1 + \frac{\mu}{\rho}\right) y + \left(\alpha Q_2 - \frac{1}{2\rho}\right) y^2\right]\right] < +\infty.$$

Comme (*cf.* 11.(6)), Q_2 est déterministe, ceci force $\alpha Q_2 - (1/2\rho) = -\chi^2$, avec $\chi > 0$ déterministe, et donc :

$$\int_{\mathbb{R}} dy \exp\left[\left(\alpha Q_1 + \frac{\mu}{\rho}\right) y + \left(\alpha Q_2 - \frac{1}{2\rho}\right) y^2\right] = \frac{\sqrt{2\pi}}{\chi} \exp \frac{(\alpha Q_1 + (\mu/\rho))^2}{4\chi^2} \geqslant \frac{\sqrt{2\pi}}{\chi},$$

d'où $\mathscr{E} \geqslant (\sqrt{2\pi}/\chi)\, E(e^{\alpha Q_0})$, ce qui garantit $e^{\alpha Q_0} \in L_1(\Omega)$, et prouve le lemme car $\gamma_0 = Q_0 - (\mu^2/2\rho)$.

12.7. Le cas $\Lambda(A)$=

On a alors $c=0$. Fi

(41) $q(\varepsilon) = o(\varepsilon^M) + E$

$= o$

Sur DW, la relation
$\{\Phi(\varepsilon, 0) \leqslant y \leqslant \varepsilon^{-\gamma}\}$; l'
donc, sur DW,

(42) $\mathscr{I}_\varepsilon = \int_{\Phi(\varepsilon,}^{\varepsilon^{-}}$

ou encore, d'après 11.

(43) $\mathscr{I}_\varepsilon$

Sur DW et $|y| \leqslant \varepsilon^{-\gamma}$, o
en (24), (25) et (26), or

(44) $\exp J($

avec $|\hat{J}| \leqslant c_{26}\, \varepsilon^{-2(L+1}$
$|y| \leqslant \varepsilon^{-\gamma}$:

(45) exp

où $\hat{I}$ est somme de $\hat{J}$ et
existe donc $c_{27} > 0$ tel

(46) $|\hat{I}| \leqslant \varepsilon$

Substituons (45) da
obtenir :

(47) $\mathscr{I}_\varepsilon = \sum_{0 \leqslant}$

12.7. LE CAS $\Lambda(A)=0$

On a alors $c=0$. Fixons L et M comme en 12.5. De 12.4, on tire :

$$(41)\quad q(\varepsilon)=o(\varepsilon^M)+E[1_{DY\cap DW}\,1_{Z_{n+1}>0}\,X_N]$$
$$=o(\varepsilon^M)+E[1_{DW}\,E[1_{|Y|\leqslant\varepsilon^{-\gamma}}\,1_{F(\varepsilon,Y)\geqslant 0}\exp M(\varepsilon, Y)\,|\,\Delta]].$$

Sur DW, la relation $\{(y)\leqslant\varepsilon^{-\gamma}$ et $F(\varepsilon, y)\geqslant 0\}$ équivaut, d'après 12.1, à $\{\Phi(\varepsilon, 0)\leqslant y\leqslant\varepsilon^{-\gamma}\}$; *l'espérance conditionnelle* $E[\ldots|\Delta]$ dans (41) s'écrit donc, sur DW,

$$(42)\qquad \mathscr{I}_\varepsilon=\int_{\Phi(\varepsilon,\,0)}^{\varepsilon^{-\gamma}} dy\,\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\exp\left[M(\varepsilon, y)-\frac{(y-\mu)^2}{2\rho}\right],$$

ou encore, d'après 11.(33) :

$$(43)\qquad \mathscr{I}_\varepsilon=\int_{\Phi(\varepsilon,\,0)}^{\varepsilon^{-\gamma}} dy\exp[\tau(y)+J(\varepsilon, y)].$$

Sur DW et $|y|\leqslant\varepsilon^{-\gamma}$, on a $|J(\varepsilon, y)|\leqslant c_{25}\,\varepsilon^{1-2\gamma}$ d'après 11.(31), et, comme en (24), (25) et (26), on en déduit que :

$$(44)\qquad \exp J(\varepsilon, y)=\textstyle\sum_{0\leqslant j\leqslant L}\frac{1}{j\,!}[J(\varepsilon, y)]^j+\varepsilon^{L+1}\hat{J},$$

avec $|\hat{J}|\leqslant c_{26}\,\varepsilon^{-2(L+1)\gamma}$. De (44) et 11.(32), on déduit, sur DW et $|y|\leqslant\varepsilon^{-\gamma}$:

$$(45)\qquad \exp J(\varepsilon, y)=\textstyle\sum_{0\leqslant j\leqslant L}\varepsilon^j I_j(y)+\varepsilon^{L+1}\hat{I},$$

où $\hat{I}$ est somme de $\hat{J}$ et d'un polynôme en ε, y à coefficients dans $\mathbb{R}[\Delta]$; il existe donc $c_{27}>0$ tel que :

$$(46)\qquad |\hat{I}|\leqslant\varepsilon^{-\gamma c_{27}}\quad \text{sur } DW \quad \text{et} \quad |y|\leqslant\varepsilon^{-\gamma}.$$

Substituons (45) dans (43) et utilisons les notations 11.(35) pour obtenir :

$$(47)\qquad \mathscr{I}_\varepsilon=\textstyle\sum_{0\leqslant j\leqslant L}\varepsilon^j\{F_j[\Phi(\varepsilon, 0)]-F_j(\varepsilon^{-\gamma})\}+\varepsilon^{L+1}\hat{\mathscr{I}},$$

où $|\hat{\mathscr{I}}| \leqslant 1/\sqrt{2\pi\rho}\int |f| \exp\tau(y)\,dy$. De (46), on tire :

$$(48)\quad E(1_{DW}|\hat{\mathscr{I}}|) \leqslant \varepsilon^{-\gamma c_{27}} E\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\int_{\mathbb{R}} \exp\tau(y)\,dy\right.$$

$$\left. = \varepsilon^{-\gamma c_{27}} E[\exp\Pi(y)] \leqslant c_{28}\,\varepsilon^{-\gamma c_{27}}\right].$$

Rappelons que $\tau(y)$ est un polynôme de degré 2, avec terme de plus haut degré à coefficient déterministe <0 (*cf.* lemme 12.6) de sorte que les intégrales $F_j(s)$ sont bien définies. On a d'ailleurs par 11.(35), pour $0 \leqslant j \leqslant L$,

$$E[|F_j(\varepsilon^{-\gamma})|] \leqslant E[1_{|Y| \geqslant \varepsilon^{-\gamma}} |I_j(Y)| \exp\Pi(Y)]$$
$$\leqslant c_{29}\, E[1_{|Y| \geqslant \varepsilon^{-\gamma}}\,\Theta(1+|Y|)^{c_{29}} \exp\Pi(Y)],$$

où Θ est la somme des modules des coefficients des polynômes $I_j(y)$, $0 \leqslant j \leqslant L$. Ces coefficients étant dans $\mathbb{R}[\Delta]$, on voit que $\Theta \in \mathscr{W}$ et a donc des moments de tous ordres. Par suite $[\Theta(1+|Y|)^{c_{29}} \exp\Pi(Y)]$ est dans $L_\alpha(\Omega)$ pour $1 \leqslant \alpha < 1/1-\eta$ et l'inégalité de Hölder donne :

$$(49)\qquad E[|F_j(\varepsilon^{-\gamma})|] \leqslant c_{30}[P(|Y| > \varepsilon^{-\gamma})]^{1-1/\alpha} \leqslant \exp - \varepsilon^{-\gamma c_{31}},$$

avec $c_{31} > 0$. De (48), (49), (47) et (41), on conclut :

$$(50)\qquad q(\varepsilon) = o(\varepsilon^M) + E[1_{DW} \textstyle\sum_{0 \leqslant j \leqslant L} \varepsilon^j F_j[\Phi(\varepsilon, 0)]] + o(\varepsilon^{L+1-\gamma c_{27}}).$$

Pour $1 \leqslant \alpha < 1/1-\eta$, 11.(35) fournit $c_{32}(\alpha)$ tel que pour $0 \leqslant j \leqslant L$, $s \in \mathbb{R}$:

$$(51)\qquad E(|F_{j0}(s)|^\alpha) \leqslant E[|I_j(Y)\exp\Pi(Y)|^\alpha] \leqslant c_{32}(\alpha).$$

Sur DW et pour $|s| \leqslant 6\varepsilon^{1-\gamma}$ avec ε petit, on a $|\tau(s)| \leqslant 1+\gamma_0$; d'autre part (*cf.* 11.(36)), pour $i \geqslant 1$, on a $F_{ji}(s) = \Pi_{ji}(s)\exp\tau(s)$, et pour $|s| \leqslant 1$, il est clair que $|\Pi_{ji}(s)| \leqslant \bar{\Pi}_{ji}$, où $\bar{\Pi}_{ji} \in \mathbb{R}[\Delta]$ car Π_{ji} est à coefficients dans $\mathbb{R}[\Delta]$D'où :

$$(52)\qquad E[1_{DW}|F_{ji}(s)|] \leqslant E[\Pi_{ji}\, e^{1+\gamma_0}] \leqslant c_{33},$$

pour $|s| \leqslant 6\varepsilon^{1-\gamma}$, $0 \leqslant j \leqslant L$, $1 \leqslant i \leqslant L$.

La formule de Taylor donne, pour un $\delta \in [0, 1]$:

$$(53)\qquad F_j(s) = \textstyle\sum_{0 \leqslant i \leqslant L} s^i f_{ji} + s^{L+1} F_{j,L+1}(\delta s).$$

D'après (4), on a sur (53) entraînent ;

(54) $E[1_{DW} F_j[\Phi(\varepsilon, 0]]$

tandis que (27) et (28) d

(55) $\Phi(\varepsilon,$

avec :

(56)

Définissons les $v_k \in \mathbb{R}[$

(57) $E[1_{DW}\sum_{0 \leqslant j \leqslant L} \varepsilon^j F$

où $\hat{v}_{L+1}$ est une combi polynomiaux en $\{\varepsilon; \hat{\Phi}_L$ (56) montre alors l'exist

(58)

Les relations (50), (57

(59) $q(\varepsilon) = o(\varepsilon^M)$

On prendra donc γ as

Enfin, les v_k étant (*cf.* à coefficients dans $\mathbb{R}[$ $1 \leqslant \alpha < 1/1-\eta$, on a $v_k \in$ donne alors $c_{36} > 0$ tel q

$|\chi_j$

Par conséquent, (59) c

(60)

et 9.4 entraîne alors :

(61) $P(x_0^\varepsilon$

D'après (4), on a sur DW la majoration $|\Phi(\varepsilon, 0)| \leqslant 6\varepsilon^{1-\gamma}$; ainsi (52) et (53) entraînent :

(54) $$E[1_{DW} F_j[\Phi(\varepsilon, 0)]] = E[1_{DW} \textstyle\sum_{0 \leqslant i \leqslant L} (\Phi(\varepsilon, 0))^i f_{ji} + O(\varepsilon^{(L+1)(1-\gamma)}),$$

tandis que (27) et (28) donnent :

(55) $$\Phi(\varepsilon, 0) = \textstyle\sum_{1 \leqslant \varepsilon \leqslant L} \varepsilon^l \Phi_{l0} + \varepsilon^{L+1} \hat{\Phi}_{L+1}$$

avec :

(56) $$|\hat{\Phi}_{L+1}| \leqslant e^{-\gamma c_{18}} \quad \text{sur } DW.$$

Définissons les $v_k \in \mathbb{R}[\Delta]$ par 11.(41); de (54), (55), on tire :

(57) $$E[1_{DW} \textstyle\sum_{0 \leqslant j \leqslant L} \varepsilon^j F_j(\Phi(\varepsilon, 0))]$$
$$= E[1_{DW} (\textstyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant L} \varepsilon^k v_k + \hat{v}_{L+1})] + O(\varepsilon^{(L+1)(1-\gamma)}),$$

où $\hat{v}_{L+1}$ est une combinaison linéaire des f_{ji}, $0 \leqslant i, j \leqslant L$, à coefficients polynomiaux en $\{\varepsilon; \hat{\Phi}_{L+1}; \Phi_{l0}, 1 \leqslant l \leqslant L\}$. Mais les Φ_{l0} étant dans $\mathbb{R}[\Delta]$, (56) montre alors l'existence de $c_{34} > 0$ tel que :

(58) $$|\hat{v}_{L+1}| \leqslant \varepsilon^{-\gamma c_{34}} \quad \text{sur } DW.$$

Les relations (50), (57) et (58) fournissent $c_{35} > 0$ tel que :

(59) $$q(\varepsilon) = o(\varepsilon^M) + \textstyle\sum_{0 \leqslant j \leqslant L} \varepsilon^j E(1_{DW} v_j) + O(\varepsilon^{L+1-\gamma c_{35}}).$$

On prendra donc γ assez petit pour que $L + 1 - \gamma c_{35} > M$.

Enfin, les v_k étant (*cf.* 11.(41)) des combinaisons linéaires finies des f_{ji} à coefficients dans $\mathbb{R}[\Delta]$, et les $f_{ji} = e^{\gamma_0} \Pi_{ji}(0)$ étant dans $L_\alpha(\Omega)$ pour $1 \leqslant \alpha < 1/1 - \eta$, on a $v_k \in L_\alpha(\Omega)$ pour $1 \leqslant \alpha < 1/1 - \eta$. L'inégalité de Hölder donne alors $c_{36} > 0$ tel que les $\chi_j = E(v_j)$, $0 \leqslant j \leqslant L$, vérifient :

$$|\chi_j - E(1_{DW} v_j)| \leqslant \exp(-\varepsilon^{-\gamma c_{36}}).$$

Par conséquent, (59) devient :

(60) $$q(\varepsilon) = o(\varepsilon^M) + \textstyle\sum_{0 \leqslant j \leqslant L} \varepsilon^j \chi_j$$

et 9.4 entraîne alors :

(61) $$P(x^\varepsilon_{0,T} \in A) = o(\varepsilon^M) + \textstyle\sum_{0 \leqslant j \leqslant L} \varepsilon^j \chi_j.$$

APPENDICE

Compléments sur la fonctionnelle $\Lambda(A)$

A.1. LE DOMAINE DE CONVEXITÉ STRICTE DE L'ÉNERGIE

Considérons le système perturbé x^ε vérifiant 1.1 et soit λ sa transformée de Cramer.

A.1.1. PROPOSITION. — *Il existe un unique point $\varphi \in C'_x$ tel que $\lambda'(\varphi)=0$, et φ est la solution du système déterministe limite de* 1.(1) *pour $\varepsilon \to 0$, c'est-à-dire que $\varphi'_t \equiv b_t(0, \varphi_t)$ et $\varphi_0 = x$. De plus, φ est l'unique point de C_x tel que $\lambda(\varphi)=0$.*

Preuve. — Soit $\varphi \in C'_x$ et $\bar\varphi_t = \varphi'_t - b_t(0, \varphi_t)$. Pour chaque $t>0$, il existe une unique forme bilinéaire $G_t : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ telle que :

$$u^* . \Gamma'_t(\varphi_t) v . u = (G_t u^2)^* . v \quad \text{pour tout } u, v \in \mathbb{R}^m.$$

D'après 7.(4), $\lambda'(\varphi)=0$ implique, pour tout $g \in C'_0$:

$$\int_0^T \left[\bar\varphi^* . \Gamma_0 . (g' - b_{01} g) + \frac{1}{2}(G \bar\varphi^2) . g \right] dt = 0,$$

d'où l'identité :

$$\int_t^T \left(\frac{1}{2} G \bar\varphi^2 - b^*_{01} \Gamma_0 \bar\varphi \right) du = \Gamma_0(t) \bar\varphi_t \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Par suite, $k_t = \Gamma_0(t) \bar\varphi_t$ est solution de l'équation différentielle :

$$k' = K k^2 - b^*_{01} k \quad \text{sur } [0, T], \quad \text{avec } k_T = 0,$$

où $K = 1/2\, G \circ (\Gamma_0^{-1} \otimes \Gamma_0^{-1})$. Ceci force $k \equiv 0$, d'où $\bar\varphi \equiv 0$.

A.1.2. PROPOSITION. — *Soit φ la trajectoire limite du système perturbé x^ε vérifiant* 1.1 *et soit $|||.|||$ la norme sur C'_0 (cf. § 1). Alors, il existe des constantes $k_j > 0$, $0 \leqslant j \leqslant 4$ ayant les propriétés suivantes :*

(1) $$\| g - f \|_\infty \leqslant k_1 ||| g - f ||| \qquad \textit{pour } f, g \in C_x,$$

(2) $$\frac{1}{k_2} ||| f - \varphi ||| \leqslant \sqrt{\lambda(f)} \leqslant k_2 ||| f - \varphi ||| \quad \textit{pour } f \in C_x, \quad \lambda(f) < k_0,$$

(3) $$(k_3 - k_4 \sqrt{\lambda(f)}) ||| g |||^2 \leqslant \lambda''(f) g^2 \qquad \textit{pour } g \in C'_0, \quad f \in C_x, \quad \lambda(f) < k_0,$$

En particuli
de convexité
Preuve. -
d'où (1) par
de centre φ;
et $\lambda(f) < k_5$
La définit
(4)
L'applicat
$(\mathscr{D}f)_t = \bar f_t =$
où z est la d
son inverse e
inverse locale
sont localem
(5) $\| \bar f \|_2$ / $||| f - \varphi$
Clairement
Soit v_f la f
(6)
Soient E (
dans $L_2[0, T]$
usuelle. L'app
sur l'ouvert B

En particulier, $\lambda''(f)$ est définie positive pour $\lambda(f)$ assez petit, et le rayon de convexité $RC(x)$ de λ en x, défini en 2.3, est positif strict.

Preuve. — Pour $g, f \in C_x$, on peut écrire :

$$g(t)-f(t)=\int_0^t (g'-f')\,ds;$$

d'où (1) par l'inégalité de Schwartz. Fixons une petite boule ouverte $B \subset C_x$ de centre φ; alors, λ atteint sa borne inférieure k_5 *sur* $(C_x - B)$, d'où $k_5 > 0$, et $\lambda(f) < k_5$ implique $f \in B$.

La définition $\lambda(f) = 1/2 \int_0^T \bar{f}^* \Gamma(f) \bar{f}\,dt$ fournit alors $k_6 > 0$ tel que :

$$\text{(4)} \qquad \frac{1}{k_6}\|\bar{f}\|_2 \leqslant \sqrt{\lambda(f)} \leqslant k_6 \|\bar{f}\|_2, \quad \text{dès que } \lambda(f) < k_5.$$

L'application $\mathscr{D}$ de C'_x dans $L_2[0, T]$ définie par $(\mathscr{D}f)_t = \bar{f}_t = f'_t - b_t(0, f_t)$ est de classe $\geqslant 2$ au voisinage de φ et :

$$(\mathscr{D}'_f \cdot g)_t = g'_t - \frac{\partial b_t}{\partial z}(0, f_t) \cdot g_t \qquad \text{pour} \quad g \in C'_0,$$

où z est la deuxième variable dans $b_t(.,.)$. On voit que $\mathscr{D}'_f$ est inversible; son inverse est continue (théorème du graphe fermé) et $\mathscr{D}$ admet donc une inverse locale de classe $\geqslant 1$ au voisinage de 0; en particulier, $\mathscr{D}^{-1}$ et $\mathscr{D}$ sont localement lipschitziennes. Ceci donne $k_7 > 0$, $k_8 > 0$ tels que :

$$\text{(5)} \quad \begin{cases} \|\bar{f}\|_2 = \|\mathscr{D}f - \mathscr{D}\varphi\|_2 \leqslant k_7 |||f - \varphi||| & \text{pour } |||f-\varphi||| \leqslant k_8, \\ |||f-\varphi||| = |||\mathscr{D}^{-1}\bar{f} - \mathscr{D}^{-1}0||| \leqslant k_7 \|\bar{f}\|_2 & \text{pour } \|\bar{f}\|_2 \leqslant k_8. \end{cases}$$

Clairement, (4) et (5) prouvent l'assertion (2).

Soit ν_f la forme quadratique suivante sur C_0 (*cf.* 9.(9)) :

$$\text{(6)} \qquad \nu_f g^2 = \frac{1}{2}\int_0^T (\mathscr{D}'_f \cdot g)^* \cdot \Gamma(f) \cdot \mathscr{D}'_f \cdot g\,dt.$$

Soient E (resp. F) l'espace des applications linéaires continues de C'_0 dans $L_2[0, T]$ (resp. de $L_2[0, T]$ dans C'_0) muni de la norme banachique usuelle. L'application $f \to \mathscr{D}'_f$ de C_0 dans E est clairement de classe $\geqslant 1$ sur l'ouvert B; $\mathscr{D}'_f$ étant inversible, on en déduit que $\mathscr{D}'_f$ et $(\mathscr{D}'_f)^{-1}$ restent bornés en norme dans E et F respectivement, lorsque $\|f-\varphi\|_\infty$ tend vers zéro. Il existe donc k_9, $k_{10}>0$ tels que :

$$(7)\quad \frac{1}{k_9}|||g||| \leqslant \|\mathscr{D}'_f \cdot g\|_2 \leqslant k_9 |||g||| \qquad \text{pour} \quad \|f-\varphi\|_\infty \leqslant k_{10}, \quad g\in C'_0,$$

et (6) fournit alors $k_{11}>0$ tel que :

$$(8)\quad \frac{1}{k_{11}}|||g|||^2 \leqslant |\nu_f g^2| \leqslant k_{11}|||g|||^2 \qquad \text{pour} \quad \|f-\varphi\|_\infty \leqslant k_{10}, \quad g\in C'_0.$$

Posons $\lambda_2 = 1/2\,\lambda''(f)$; d'après 7.(5), on a $\lambda_2=\tilde{\lambda}_2+\nu_f$ avec $\tilde{\lambda}_2$ défini par 7.(6). Pour $\|f-\varphi\|_\infty \leqslant k_{10}$, la formule 7.(6) donne facilement $k_{12}>0$ vérifiant pour tout $g\in C'_0$:

$$|\tilde{\lambda}_2 g^2| \leqslant k_{12}[\|\bar{f}\|_2 \|\mathscr{D}'_f \cdot g\|_2 \|g\|_\infty + \|\bar{f}\|_2^2 \|g\|_\infty^2 + \|\bar{f}\|_2 \|g\|_\infty^2],$$

d'où, d'après (7), (8) et (1) :

$$|\tilde{\lambda}_2 g^2| \leqslant k_{13}\|\bar{f}\|_2 |||g|||^2 \qquad \text{pour} \quad \|f-\varphi\| \leqslant k_{10}, \quad \|\bar{f}\|_2 \leqslant 1, \quad g\in C'_0.$$

Grâce à (4), on en tire finalement :

$$(9)\qquad |\tilde{\lambda}_2 g^2| \leqslant k_{14}\sqrt{\lambda(f)}\,|||g|||^2 \qquad \text{pour} \quad \lambda(f)<k_{15} \quad \text{et} \quad g\in C'_0.$$

A.2. Fonctionnelle de Cramer et ouverts convexes

A.2.1. Théorème. — *Soit x^ε un système dynamique perturbé vérifiant* 1.1. *Soit A un ouvert convexe de C_x. Alors, la fonctionnelle de Cramer Λ associée aux x^ε vérifie :*

$$(10)\qquad \Lambda(A)=\Lambda(\bar{A})=-\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2 \log P(x^\varepsilon_{0,\,T}\in A).$$

Preuve. — D'après 2.4, il suffit de prouver que $\Lambda(A)=\Lambda(\bar{A})$. Soit $\bar{A}$ l'adhérence de A dans C_x; A étant ouvert, $\Lambda(A)$ est fini si A est non vide, et donc $\Lambda(\bar{A})=\Lambda(\bar{A}\cap C'_x)$. Soit $\mathscr{A}\subset C'_x$ l'adhérence de $A\cap C'_x$ pour la topologie de C'_x et soit $g\in C'_x-\mathscr{A}$. Il existe alors, puisque $A\cap C'_x$ est ouvert convexe dans C'_x, un nombre a et une fonctionnelle affine continue $\Phi : C'_x\to\mathbb{R}$ tels que :

$$(11)\qquad \Phi h\geqslant a \quad \text{pour tout } h\in\mathscr{A}, \text{ mais } \Phi g<a.$$

Si Φ n'était pas continue sur C'_x *pour la norme* $\|\ \ \|_\infty$, il existerait une suite h_n dans C'_x telle que $\|h_n\|_\infty\to 0$ et $\Phi h_n\to 1$. Pour tout $h\in A\cap C'_x$ et

$s\in\mathbb{R}$, on aur
grand, d'où :

ce qui est im
Donc, Φ
prolonge en
Puisque A
force $\Phi h\geqslant a$
implique $g\notin$
voit que $\bar{A}\cap$
D'autre pa
définition de

$\Lambda(\mathscr{A}$

et finalement

A.2.2. Th
rayon de con
tel que $\Lambda($
$\lambda(f)=\Lambda(A)$

Preuve. —
ρ tel que $\Lambda($
sur l'ouvert c
On sait
$\lambda(f)=\Lambda(A)$
on aurait $\lambda(f$
rait la stricte
Enfin, si f
$\lambda(f)=0$ d'où

A.3. Util

A.3.1. Pr
$\lambda(f)=\Lambda(\bar{A})$.

$s \in \mathbb{R}$, on aurait, A étant ouvert dans C_x, $h + sf_n \in A \cap C'_x$ pour n assez grand, d'où :

$$\Phi h + s = \lim_{n \to +\infty} \Phi (h + sf_n) \geqslant a,$$

ce qui est impossible pour $s < 0$ convenablement choisi.

Donc, Φ est continue sur C'_x pour la norme $\| \ \|_\infty$ et par suite se prolonge en une unique fonctionnelle Φ affine continue sur C_x.

Puisque $A \cap C'_x$ est dense dans $\bar{A}$ pour la topologie de C_x, la relation (11) force $\Phi h \geqslant a$ pour tout $h \in \bar{A}$ et donc $g \notin \bar{A}$. Ainsi la relation $g \in C'_x - \mathscr{A}$ implique $g \notin \bar{A}$, d'où $\bar{A} \cap C'_x \subset \mathscr{A}$. L'inclusion inverse étant évidente, on voit que $\bar{A} \cap C'_x = \mathscr{A}$.

D'autre part, λ étant continue sur C'_x pour la topologie de C'_x, on a par définition de $\mathscr{A}$:

$$\Lambda (\mathscr{A}) = \inf_{g \in \mathscr{A}} \lambda (g) = \inf_{g \in A \cap C'_x} \lambda (g) = \Lambda (A \cap C'_x) = \Lambda (A)$$

et finalement :

$$\Lambda (\bar{A}) = \Lambda (\bar{A} \cap C'_x) = \Lambda (\mathscr{A}) = \Lambda (A).$$

A.2.2. Théorème. — *Mêmes hypothèses qu'en* A.2.1. *Soit $RC(x)$ le rayon de convexité de λ en x défini en* 2.3. *Soit A un ouvert convexe de C_x tel que $\Lambda (A) < RC(x)$. Alors, il existe un unique $f \in \bar{A}$ tel que $\lambda (f) = \Lambda (A) = \Lambda (\bar{A})$. De plus, si $\Lambda (A) > 0$, on a $f \in \partial A$.*

Preuve. — Soit A un ouvert convexe de C_x tel que $\Lambda (A) < RC(x)$. Fixons ρ tel que $\Lambda (A) < \rho < RC(x)$. La fonction λ est (*cf.* 2.3) *strictement convexe* sur l'ouvert convexe B de C'_x défini par $B = \{ g \in C'_x \mid \lambda (g) < \rho \}$.

On sait (*cf.* 2.2) qu'il existe $f \in \bar{A}$ tel que $\lambda (f) = \Lambda (\bar{A})$, d'où $\lambda (f) = \Lambda (A) = \Lambda (\bar{A})$ par A.2.1. S'il existait $g \in \bar{A}$ avec $g \neq f$ et $\lambda (f) = \lambda (g)$, on aurait $\lambda (f) = \lambda (g) \leqslant \lambda (uf + (1-u) g)$ pour tout $u \in [0, 1]$, ce qui contredirait la stricte convexité de λ sur B. D'où l'unicité de f dans $\bar{A}$.

Enfin, si f appartient à l'ouvert A, on a $\lambda' (f) = 0$ et donc, par A.1.1, $\lambda (f) = 0$ d'où $\Lambda (A) = 0$.

A.3. Utilisation de l'équation locale de A

A.3.1. Proposition. — *Soit A un ouvert de C_x et $f \in \bar{A}$ tel que $\lambda (f) = \Lambda (\bar{A})$. Supposons $f \in \partial A$ (ce qui est toujours vrai si $\Lambda (A) > 0$) et ∂A*

de classe $(n+3)$ *en* f. *Alors, on a* $\lambda(f)=\Lambda(A)=\Lambda(\bar{A})$. *De plus, si on écrit l'équation locale de* A *en* f :

$$A \cap (f+W) = \{ f+g \mid g \in W,\ G(f+g)>0 \},$$

avec W *boule ouverte de centre* 0 *dans* C_0 *et* $G : f+W \to \mathbb{R}$ *fonctionnelle de classe* $n+3$ *vérifiant* $G'(f) \neq 0$, *alors, il existe un nombre* $c \geqslant 0$ *tel que* $\lambda'(f)=c\,G'(f)$; *de plus,* $\{c=0\}$ *si et seulement si* $\{\Lambda(A)=0\}$. *Enfin, la forme quadratique* $[\lambda''(f)-c\,G''(f)]$ *est positive au sens large sur* $C'_0 \cap K$, *où* $K \subset C_0$ *est le noyau de* $G'(f)$. *D'autre part, si* A *est convexe au voisinage de* f, *on a* $G''(f) \leqslant 0$ *sur* $K+K$.

Preuve. — Posons $G_1=G'(f)$, $G_2=(1/2)\,G''(f)$, et fixons $h \in C'_0$ tel que $G_1 h=1$. Soit $K \subset C_0$ le noyau de G_1. Identifions C_x avec $\{ f+\mathbb{R}h+K \}$ en écrivant tout $\gamma \in C_x$ sous la forme :

$$\gamma = f+uh+k \qquad \text{avec} \quad u \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad k \in K,$$

ce qui impose :

$$u=u(\gamma)=G_1 \cdot (\gamma - f) \qquad \text{et} \qquad k=\gamma - f - u(\gamma)\,h.$$

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe des voisinages convexes U_1, U_2 de 0 dans $\mathbb{R}$ et K, et une fonctionnelle $\psi : U_2 \to \mathbb{R}$ de classe $(n+3)$ tels que, pour $u \in U_1$ et $k \in U_2$, on ait $uh+k \in W$ et :

$$(1) \qquad \begin{cases} G(f+uh+k)=0 & \Leftrightarrow \quad u=\psi(k), \\ G(f+uh+k)>0 & \Leftrightarrow \quad u>\psi(k). \end{cases}$$

L'identité :

$$(2) \qquad G(f+\psi(k)\,h+k) \equiv 0 \qquad \text{pour} \quad k \in U_2,$$

entraîne par dérivations successives :

(3)

$$\psi(0)=0; \qquad \psi'(0)=0; \qquad \frac{1}{2}\psi''(0)=-G_2.$$

Posons $V=U_1 h+U_2$; d'après (1), on a :

$$(4) \qquad A \cap (f+V) = \{ f+uh+k \mid u \in U_1,\ k \in U_2,\ u>\psi(k) \}.$$

? plus, si on écrit

?,

? fonctionnelle de
?re $c \geqslant 0$ tel que
?$=0\}$. Enfin, la
? sur $C_0' \cap K$, où
?xe au voisinage

?s $h \in C_0'$ tel que
? $\{f+\mathbb{R}h+K\}$

h.

des voisinages
$\psi : U_2 \to \mathbb{R}$ de
V et :

?.

Ceci prouve qu'on peut trouver des $f_j \in A \cap (f+V)$ tels que $f=\lim_{j \to +\infty} f_j$ pour la topologie de C_x'. Mais λ est continue sur C_x', d'où $\Lambda(\bar{A})=\lambda(f)=\lim_{j \to +\infty}\lambda(f_j) \geqslant \Lambda(A)$. Comme on a toujours $\Lambda(\bar{A}) \leqslant \Lambda(A)$, on conclut que $\lambda(f)=\Lambda(\bar{A})=\Lambda(A)$.

Posons $\lambda_1=\lambda'(f)$, $\lambda_2=(1/2)\lambda''(f)$. Soit $\gamma=f+uh+k$ avec $u \in U_1$, $k \in U_2 \cap C_0'$, de sorte que $\gamma \in C_x'$. Alors, la relation $\{u \geqslant \psi(k)\}$ implique $\gamma \in \bar{A}$ et donc $\{\lambda(\gamma)-\lambda(f) \geqslant 0\}$. Cette dernière relation s'écrit :

$$\lambda_1 \cdot (uh+k)+\lambda_2 (uh+k)^2+O(|u|^3+|||k|||^3) \geqslant 0, \tag{5}$$

tandis que $\{u \geqslant \psi(k)\}$ s'écrit, d'après (3) :

$$u \geqslant -G_2 k^2+O(\|k\|_\infty^3). \tag{6}$$

Soit $u>0$ et $k \in U_2 \cap C_0'$; alors (6) est vraie pour $(tu, t^2 k)$ quand $t \in \mathbb{R}^+$ tend vers zéro. Comme (6) implique (5), on en tire, quand $t \to 0$, la relation $\lambda_1 h \geqslant 0$.

Soit $k \in U_2 \cap C_0'$ avec $\|k\|_\infty$ assez petit; il existe alors $u \in U_1$ tel que $u>-G_2 k^2$. Alors, (6) est vraie pour $(t^2 u, tk)$ quand $t \in \mathbb{R}^+$ tend vers zéro. Comme (6) implique (5), on en tire $\lambda_1 k \geqslant 0$. Remplaçant k par $-k$, on conclut que λ_1 est nul sur $K \cap C_0'$. Mais l'implication (6) $\Rightarrow$ (5), appliquée à $t^2 u$, tk avec $u>-G_2 k^2$, entraîne alors pour $t \to 0$ la relation $\{u\lambda_1 h+\lambda_2 k^2 \geqslant 0\}$.

Faisons décroître u vers $-G_2 k^2$ pour conclure :

$$(-cG_2+\lambda_2)k^2 \geqslant 0 \qquad \text{pour} \quad k \in K \cap C_0', \tag{7}$$

en notant c la constante $c=\lambda_1 h \geqslant 0$.

Les relations $\{\lambda_1$ nul sur $K \cap C_0'$; $\lambda_1 h=c$; $G_1 h=1\}$ entraînent, par définition de K, $\lambda_1 \equiv c G_1$ sur C_0'. Remarquons que $c=0$ équivaut à $0=\lambda_1=\lambda'(f)$ et donc à $\Lambda(A)=\lambda(f)=0$ d'après A.1.1.

Enfin, si A est convexe au voisinage de f, la relation (4) entraîne classiquement $\psi''(0) \geqslant 0$ sur K, et donc d'après (3) $G_2 k^2 \leqslant 0$ pour $k \in K$.

A.3.2. PROPOSITION. — *Soit A ouvert de C_x comme en* A.3.1. *Soit $H : f+V \to \mathbb{R}$ l'équation locale corrigée de A définie au paragraphe* 4.1, *avec V boule ouverte de centre 0 et de rayon r dans C_0. Alors, pour r assez petit, on a :*

$$H(\gamma)=u(\gamma)-\psi(\gamma-f-u(\gamma)h), \tag{8}$$

$$A \cap (f+V)=\{\gamma \in f+V \mid H(\gamma)>0\}. \tag{9}$$

De plus, si on pose :

$$G_j = \frac{1}{j\,!} G^{(j)}(f) \qquad \text{et} \qquad H_j = \frac{1}{j\,!} H^{(j)}(f),$$

on a :

$$H_1 = G_1, \qquad H_2 = G \circ (p \otimes p), \tag{10}$$

où $p : C_0 \to K$ est la projection $p\gamma = \gamma - (G_1\,\gamma)\,h$.

En particulier, $\lambda_1 = c\,H_1$ avec $c \geqslant 0$ comme plus haut, et la forme quadratique $(-c\,H_2 + \lambda_2)$ est définie positive *sur tout* C'_0 dès que A est convexe au voisinage de f et vérifie $\Lambda(A) < RC(x)$ où $RC(x)$ est le rayon de convexité de λ en x.

A.3.3. *Remarque.* — Les H_j sont des polynômes en $G_1 \ldots G_j$ faciles à expliciter car, pour $j \geqslant 2$, on a :

$$H_j = -\psi_j \circ p^{\otimes j} \qquad \text{avec} \qquad \psi_j = \frac{1}{j\,!} \psi^{(j)}(0). \tag{11}$$

Par exemple, on a pour $\gamma \in C_0$:

$$H_3\,\gamma^3 = G_3\,(p\,\gamma)^3 - 2\,G_2\,[p\,\gamma,\ (G_2 \,.\, (p\,\gamma)^2)\,h]. \tag{12}$$

A.3.4. *Preuves de* A.3.2 *et* A.3.3. — Conservons les notations de la preuve de A.3.1. Si on pose $V = U_1\,h + U_2$, l'assertion (9) est une traduction immédiate de (4). Les formules (10), (11), (12) se déduisent élémentairement des identités (2), (3), (8). Enfin, si A est convexe au voisinage de f, la restriction de G_2 à K est négative au sens large d'après A.3.2. Comme $H_2\,\gamma^2 = G_2 \,.\, (p\,\gamma)^2$ avec $p\,\gamma \in K$, on voit que $H_2 \leqslant 0$ sur $C_0 \times C_0$. Quand λ_2 est définie positive sur C'_0, il en est donc *a fortiori* de même pour $(-c\,H_2 + \lambda_2)$ car $c \geqslant 0$. Or, la relation $\Lambda(A) < RC(x)$ implique $\lambda_2 > 0$ sur $C'_0 - \{0\}$.

A.3.5. *Remarque.* — *Sans hypothèse de convexité en f pour A, ou de positivité pour λ_2, la forme quadratique $(-c\,H_2 + \lambda_2)$ est positive au sens large sur C'_0 si et seulement si :*

$$\lambda_2\,h^2 \geqslant 0, \tag{13}$$

à condition de choisir $h \in C'_0$ tel que :

$$G_1\,h = 1 \qquad \text{et} \qquad \lambda_2(h,\,k) = 0 \quad \text{pour tout } k \in K \cap C'_0. \tag{14}$$

Il existe toujo
à partir de l'e
Vérifions q
de $ph=0$, on
à la forme qua
part sur $K \cap$
donc $\geqslant 0$ par
En fait, sa
quand il n'exis
garantit « pra
$C'_0) \times (K \cap C'_0$
est définie pos
$\lambda_2\,h^2 > 0$.

A.3.6. PR
perturbé x^ε *vé*
$k_{20} > 0$ *ayant*
Toute parti
tel que $\lambda(f) =$

(15)

où le non
$\eta(A) = \inf_{v_f\,g}$

Preuve. —
tout C_0 d'apr
Comme λ_2
Mais les in
tels que :

$|\tilde{\lambda}_2\,g$

d'où la concl

Comme $\lambda($
$0 < \eta(A) \leqslant 1$

Il existe toujours un unique h vérifiant (14) comme on le vérifie facilement à partir de l'expression 7.(5) de λ_2.

Vérifions que (13), (14) équivalent à $(-cH_2+\lambda_2)\geqslant 0$. De (14), (10) et de $ph=0$, on conclut en effet que h est orthogonal à $K\cap C_0'$, relativement à la forme quadratique $(-cH_2+\lambda_2)$, et que $(-cH_2+\lambda_2)h^2=\lambda_2 h^2$; d'autre part sur $K\cap C_0'$, $(-cH_2+\lambda_2)$ coïncide avec $(-cG_2+\lambda_2)$ par (10), et est donc $\geqslant 0$ par A.3.1; d'où l'assertion ci-dessus.

En fait, sauf situations très particulières (et sûrement pas génériques), *quand il n'existe dans $\bar{A}$ qu'un seul f tel que $\lambda(f)=\Lambda(\bar{A})$*, l'argument A.3.1 garantit « pratiquement » que $(-cG_2+\lambda_2)$ est définie positive sur $(K\cap C_0')\times(K\cap C_0')$, et le raisonnement ci-dessus montre alors que $(-cH_2+\lambda_2)$ *est définie positive sur tout C_0' si et seulement si le h donné par* (14) *vérifie* $\lambda_2 h^2>0$.

A.3.6. Proposition. — *Soit λ la transformée de Cramer du système perturbé x^ε vérifiant* 1.1, *de point initial fixé x. Alors, il existe un nombre $k_{20}>0$ ayant la propriété suivante :*

Toute partie A de C_x vérifiant 3.4 *et localement convexe au point $f\in\bar{A}$ tel que $\lambda(f)=\Lambda(\bar{A})$ vérifie :*

$$1-k_{20}\sqrt{\Lambda(A)}\leqslant\eta(A)\leqslant 1, \tag{15}$$

où le nombre $\eta(A)$ est défini (cf. 9.(9), 9.(10)) *par* $\eta(A)=\inf_{\nu_f g^2=1}(\lambda_2-cH_2)g^2$.

Preuve. — Puisque A est convexe au voisinage de f, on a $H_2\leqslant 0$ sur tout C_0 d'après (10) et A.3.1, donc : $(\lambda_2-cH_2)g^2\geqslant\lambda_2 g^2$.

Comme $\lambda_2=\tilde{\lambda}_2+\nu_f$, on en déduit que : $\eta(A)\geqslant 1-\sup_{\nu_f g^2=1}\tilde{\lambda}_2 g^2$.

Mais les inégalités (8), (9) du paragraphe A.1.2 fournissent k_{16}, $k_{17}>0$ tels que :

$$|\tilde{\lambda}_2 g^2|\leqslant k_{17}\sqrt{\lambda(f)}\qquad\text{pour}\quad \lambda(f)<k_{16}\quad\text{et}\quad \nu_f g^2=1,$$

d'où la conclusion :

$$\eta(A)\geqslant 1-k_{17}\sqrt{\lambda(f)}\qquad\text{pour}\quad \lambda(f)<k_{16}.$$

Comme $\lambda(f)=\Lambda(A)$, ceci prouve (15) car on sait (*cf.* lemme 9.5) que $0<\eta(A)\leqslant 1$ pour $\Lambda(A)<RC(x)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AZENCOTT (R.). — Grandes déviations et applications, *École d'été de probabilités de Saint-Flour*, VIII, 1978, p. 1-176, Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1980 (*Lecture Notes in Mathematics*, 774).

[2] AZENCOTT (R.). — Formule de Taylor stochastique et développement asymptotique d'intégrales de Feynmann, « *Séminaire de probabilités*, XVI, 1980-1981; Supplément : *Géométrie différentielle stochastique* », p. 237-284, Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1982 (*Lecture Notes in Mathematics*, 921).

[3] AZENCOTT (R.). — Densité des diffusions en temps petit : développements asymptotiques, *Séminaire de Probabilités*, 1982-1983, Berlin, Springer-Verlag, 1984 (*Lecture Notes in Mathematics*, 1059).

[4] AZENCOTT (R.) et DOSS (H.). — L'équation de Schrödinger quand la constante de Planck tend vers zéro : une approche probabiliste. A paraître aux *Lecture Notes in Mathematics* (Albeverio, ed.).

[5] BISMUT (Jean-Michel). — *Mécanique aléatoire*, Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1981 (*Lecture Notes in Mathematics*, 866).

[6] CHALEYAT-MAUREL (M.) et JEULIN (T.). — Grossissement gaussien de la filtration brownienne. A paraître aux *Lecture Notes in Mathematics* (Yor, ed.).

[7] DONSKER (M. D.) and VARADHAN (S. R. S.). — Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time, I, II, III, *Commun. pure and appl. Math.*, t. 28, 1975, p. 1-47 et p. 279-301; t. 29, 1976, p. 389-461.

[8] ELWORTHY (David) et TRUMAN (Aubrey). — Classical mechanics, the diffusion (heat) equation and the Schrödinger equation on a Riemannian manifold, *J. of math. Phys.*, t. 22, 1981, p. 2144-2166.

[9] JEULIN (Thierry). — *Semi-martingales et grossissement d'une filtration*, Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1980 (*Lecture Notes in Mathematics*, 833).

[10] MALLIAVIN (Paul). — Stochastic calculus of variation and hypoelliptic operators, *Proceedings of the international symposium on stochastic differential equations* [1976, Kyoto], p. 195-263, New York, John Wiley and Sons, 1978.

[11] SCHILDER (M.). — Some asymptotic formulas for Wiener integrals, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 125, 1966, p. 63-85.

[12] VENTSEL (A. D.) and FREIDLIN (M. J.). — Small random perturbations of dynamical systems, *Russian math. Surv.*, t. 25, 1970, p. 1-55.

Bull. Sc. math.,
109, 1985, p. 3

DE TRA
S

RÉSUMÉ. — N
des espaces qui
de nouveaux rés
discontinus.

ABSTRACT. —
neous types. W
homogeneous ty
disconnected gro

0. Introducti

Ce travail
d'opérateurs
de type non l
Les résulta
l'auteur. Ils s
totalement di
complet en ce
incluant le ca
R. SPECTOR [

(*) Texte prés
Classification
Vedettes matié
M. Laurent S
n° 46, Université